

спектра $S(\omega) = S^*(-\omega)$ следует, что интеграл свертки совпадает с функцией неопределенности, если задержка между сигналом и его копией равна нулю [3, 5]. В этом смысле удвоитель частоты выполняет функцию согласованного фильтра. С помощью такого устройства можно осуществить выделение сигнала на уровне внешней помехи или разрешение нескольких сигналов. Однако следует иметь в виду, что преобразование спектра в нелинейном устройстве сопровождается ухудшением отношения сигнал/шум по сравнению с оптимальным (корреляционным) методом приема сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ширман Я. Д. Разрешение и сжатие сигналов М., 1974. [2] Лейкер, Бадру, Карр. ТИИЭР, 1976, 34, № 5, с. 145. [3] Вакман Д. Е. Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации. М., 1965. [4] Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М., 1971. [5] Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. М., 1971. [6] Горшков А. С., Марченко В. Ф. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1967, 10, с. 825. [7] Белин А. М., Марченко В. Ф. и др. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1975, 16, № 1, с. 22.

Поступила в редакцию
10.04.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 1

УДК 53 : 51 : 536.2

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА ПО ЗАДАННОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛЮ

Е. Е. Кондорская, В. Б. Гласко

(кафедра математики)

1. В ряде работ с помощью регуляризирующих алгоритмов [1] изучается тепловое состояние физических систем в условиях, когда характеристики источников теплового поля недоступны, по тем или иным причинам, непосредственному измерению [2—4]. Эти задачи принадлежат к классу обратных.

К числу таких задач относится и задача об определении положения теплового источника по некоторым характеристикам заданного вне занимаемой им области температурного поля, рассматриваемая в настоящей работе.

Эта задача может иметь существенное прикладное значение. Например, если в стенке некоего резервуара, отделяющей область высоких давления и температуры от внешней среды, где эти величины много меньше (речь может идти об обшивке парового котла, химического реактора и т. п.), возникает дефект, то этот дефект, не будучи вовремя обнаруженным и устраненным, приведет к пробоем стенки и аварии. Однако в некоторый начальный период своего существования (длительность этого периода зависит от конкретных условий) дефект будет проявлять себя только изменением температуры в окружающей среде, что можно зафиксировать. Определив положение дефекта, можно предотвратить аварию.

Рассмотрение этой задачи даже в рамках простейшей математической модели позволит получить ответ на ряд принципиальных вопросов и оценить возможности использования математических методов для организации систем контроля за состоянием производственной аппаратуры.

В реальных условиях измерения температуры могут быть проведены на некоторой дискретной сетке точек. Возникает вопрос о той минимальной информации, по которой характеристики источника могут быть определены однозначно. Столь же важным является вопрос об оптимальной организации измерений, т. е. о минимальном числе точек измерения температуры и допустимом расстоянии между ними, обеспечивающих требуемую точность определения характеристик источника.

2. Будем рассматривать задачу в рамках двумерной плоской модели, считая тепловой источник точечным, а его интенсивность — заданной функцией времени $f(t)$, при этом $f(0) = 0$.

Тогда температурное поле удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} a^2 \Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} &= f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \\ (-\infty < |\mathbf{x}| < +\infty, t > 0), & U|_{t=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Соответственно, $U(\mathbf{x}, t)$ связана с положением источника интегральным соотношением:

$$\left. \begin{aligned} U(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - \tau) f(\tau) d\tau, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(x_1, x_2); G = \frac{1}{4\pi a^2(t - \tau)} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{4a^2(t - \tau)}\right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Нас интересует обратная задача — об определении \mathbf{x}_0 по минимальной информации о температуре. В качестве такой информации примем значения $U(\mathbf{x}, t)$, измеренные в момент t_1 в S точках. Докажем, что справедлива следующая

Теорема 1.

Пусть $f(t)$ — заданная неотрицательная непрерывная функция, $t_1 > 0$, \mathbf{x}_s ($s = 1, 2, 3$) — три различные точки, не лежащие на одной прямой: $\mathbf{x}_1 \notin [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$ и $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{x}_0$.

Тогда решение $\{\mathbf{x}_0, U(\mathbf{x}, t)\}$ задачи

$$a^2 \Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} = -f(t) \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s), U|_{t=0} = 0,$$

$$U(\mathbf{x}_s, t_1) = \varphi_s, \quad s = 1, 2, 3$$

определено однозначно.

Доказательство.

Рассмотрим

$$I(\Delta) = \int_0^{t_1} \frac{1}{4a^2\pi(t_1 - \tau)} e^{-\frac{\Delta^2}{4a^2(t_1 - \tau)}} f(\tau) d\tau,$$

$$(\Delta \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

как некоторую функцию от Δ в области $0 < \Delta < +\infty$.

1. Каждому фиксированному значению $I(\Delta)$ соответствует одно и только одно значение Δ . Действительно, при $\Delta \neq 0$ интеграл, как и его производная по Δ , сходится равномерно. Следовательно, в области $[\Delta_0, M]$ для любых $0 < \Delta_0 < M < +\infty$ $I(\Delta)$ непрерывна. Отсюда $I(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow \infty$. Легко видеть, что $I'(\Delta) < 0$, т. е. $I(\Delta)$ — монотонно убывающая функция с областью значений $[\infty, 0]$. Следовательно,

при заданной $f(t)$ каждому значению интеграла соответствует единственное значение Δ .

2. Зафиксируем теперь две точки x_1 и x_2 и соответственно $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$. Тогда однозначно определяются $\Delta_s = |x_s - x_0|_{s=1,2}$, $C\{x_0 \mid |x_0 - x_s| \equiv \Delta_s\}$ — окружность радиуса Δ_s с центром в точке x_s : $C_{\Delta_s}^{x_s}$. Пусть $M \equiv C_{\Delta_1}^{x_1} \cap C_{\Delta_2}^{x_2}$. Очевидно, $M \neq \emptyset$ и состоит, вообще говоря, из двух точек, т. е. x_0 определяется неоднозначно.

Зафиксируем далее x_3 , не принадлежащую прямой l , соединяющей точки x_1 и x_2 . Пересечение $\bigcap_{s=1}^3 C_{\Delta_s}^{x_s}$ состоит из единственной точки (одной из двух выше указанных). Тем самым теорема доказана.

Нетрудно убедиться также, что если температура задана в момент t_1 на некоторой l , не проходящей через источник, то по этой информации его положение не может быть определено однозначно.

3. Доказанная теорема определяет минимальную информацию о температурном поле, по которой можно в указанных условиях однозначно определить положение источника при точном задании входных данных.

Если входные данные содержат погрешность, то рассмотренная в условиях теоремы задача может оказаться несовместной, либо имеющей более одного решения и тем самым некорректно поставленной [1].

Для поиска приближения к решению такой задачи при неточном задании $\varphi(x_s)$ обратимся к следующей постановке:

определить x_0 из условия

$$\min_{\{x_0\}} \sum_{s=1}^S \{U[x_s, t_1, x_0] - \tilde{\varphi}(x_s)\}^2, \quad (3)$$

предполагая тем самым приближенную температуру заданной в Сточках. Такая постановка отвечает методу наименьших квадратов, а расположение по крайней мере трех из x_s не на одной прямой — требованиям доказанной теоремы; это требование будет выполнено, если расположить точки в узлах некоторой квадратной сетки, определяемой параметрами S и h (h — шаг сетки).

Поскольку $x_0 \in R_2$, где R_2 — конечномерное пространство, возможна саморегуляризация задачи (3) в случае сходимости соответствующего итерационного процесса, в чем убедимся ниже.

Оператор $U(x_s, t_1, x_0)$ нелинейно зависит от x_0 , и для минимизации функционала в итерационном цикле мы используем процедуру Гаусса — Ньютона [5, 6]. При этом нужные значения $\partial U / \partial x_0$ определяются явным образом, дифференцированием (2) по параметрам.

4. Убедимся сначала в эффективности принятого алгоритма. Положим $\varphi(x_s) = \tilde{\varphi}(x_s)$, ($s = 1, 2 \dots S$), где $\tilde{\varphi}(x_s)$ — значения, определенные с максимальной точностью на ЭВМ в узлах квадратной сетки с шагом h и $S = N \times N$, по заданному априори $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$ ($f(t) = t$, $0 < t < t_1$). Зададим (в безразмерных величинах) $t_1 = 70$; $(\xi_0, \eta_0) = (4,5; 6,7)$. В качестве начального приближения выберем последовательно значения $x_0^0 = (4,6; 6,8)$; $(3,5; 7,9)$; $(2,4; 2,6)$; h меняем в пределах 3—11, N — в пределах 2—12. В результате решения задачи (3) на ЭВМ БЭСМ-6 значения x_0 восстанавливались с относительной точностью 10^{-3} — 10^{-6} в зависимости от величины h . Выбор начального приближения, а также величины N практически не влияют на точность вос-

становления x_0 . Таким образом, алгоритм оказывается эффективным по крайней мере при достаточно малой погрешности входных данных. Заметим, что точность, как оказалось, не зависит от характера роста интенсивности источника: при $f(t) = t^2$, $f(t) = \sqrt{t}$ результаты аналогичны описанному. Не зависит она существенно и от значения t_1 в диапазоне $7 \leq t_1 \leq 70$.

Рассмотрим результаты машинного эксперимента по оптимальной организации измерений. В этом эксперименте погрешность входных данных для $\varphi(x_s)$ имитировалась с помощью генератора случайных чисел на уровне от 10% до 50%. По-прежнему, априори задавалось

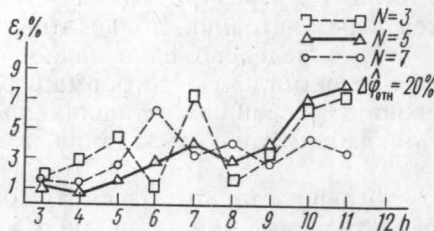


Рис. 1

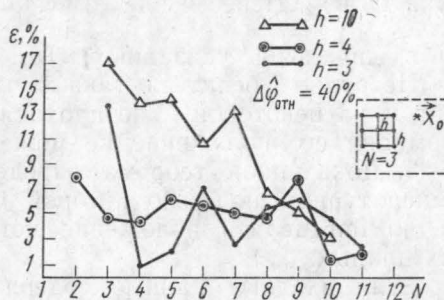


Рис. 2

$x_0 = (4,5; 6,7)$; $t_1 = 70$; h и N варьировались в прежних пределах. Анализ результатов расчетов позволяет сделать следующие наблюдения и выводы:

1₀. При $\Delta\hat{\varphi}_{отн} = 10\%$ (для любых $h=3-11$, $N=3-12$) относительная погрешность (ε) определения x_0 не превышает 4%. Однако уже для $\Delta\hat{\varphi}_{отн} = 30\%$, ε доходит до 10%, для $\Delta\hat{\varphi}_{отн} = 40\%$ — до 20%. Отсюда следует, что по крайней мере в выбранном временном диапазоне при погрешности «измеренной» температуры на уровне 30% и не слишком крутом росте интенсивности источника можно ожидать, что его положение будет определено с достаточно высокой точностью ($\varepsilon \sim 10\%$).

2₀. Рис. 1 обнаруживает тенденцию роста ε с увеличением h , особенно для малых значений N ($N \leq 5$). С увеличением исходной погрешности эта зависимость оказывается более резкой.

3₀. Для достаточно больших N ($N \geq 10$) рост погрешности ε с увеличением h несколько компенсируется увеличением числа узлов сетки (рис. 2). При фиксированном h уменьшение числа узлов (при $N \leq 5$) ведет к некоторому возрастанию ε . Оба эффекта также заметнее при больших значениях $\Delta\hat{\varphi}_{отн}$.

Следует заметить, что при малой $\Delta\hat{\varphi}$ ($\Delta\hat{\varphi}_{отн} = 10\%$) зависимость от h выражена слабо, от N — практически отсутствует, что естественно в силу небольших значений ε .

4₀. При больших $\Delta\hat{\varphi}$ становится заметен эффект, влияющий отрицательно на точность восстановления x_0 : если область, охваченная «измерениями» температуры, мала, что имеет место при малых N ($N \leq 3$) и малых h ($h=3$), и источник находится от нее на расстоянии, большем h (см. рис. 2 справа), то ε заметно возрастает (рис. 2).

Таким образом, для того чтобы при рассмотренных здесь условиях можно было определить положение источника с погрешностью порядка 10% при погрешности измеренной температуры не более 30%,

шаг сетки не должен превышать значения $h=9$. При благоприятном расположении сетки измерений относительно источника (см. п. 4) минимальным значением числа точек измерений может быть выбрано $N=3$ ($S=N \times N=9$). При возможности выбора промежуточных значений параметров ($h=4-8$; $N \geq 4$) указанная точность обеспечивается.

5. Выше мы рассматривали результаты машинного эксперимента, для которого $t_1=70$. Аналогичные расчеты, проведенные для $t_1=20$ и $t_1=7$, приводят к следующим наблюдениям. В первом случае отличие результатов от вышеописанных несущественно. Во втором, т. е. при уменьшении t_1 на порядок, точность результатов несколько падает. Однако для $\Delta \hat{\Phi}_{\text{отн}} \leq 20\%$ все выводы остаются справедливыми.

Заметим в заключение, что использование регуляризирующих по Тихонову алгоритмов [1] позволяет в рамках рассмотренной и более общих моделей определять одновременно и положение источника, и его интенсивность $f(t)$. Объем данной статьи не позволяет привести соответствующие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. [2] Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Журн. выч. матем. и матем. физики (ЖВМ и МФ), 1967, 7, № 4, с. 910. [3] Гласко В. Б., Захаров М. В., Колп А. Я. ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 6, с. 1607. [4] Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И., Шкляров И. Н. ЖВМ и МФ, 1979, 19, № 3, с. 768. [5] Березин И. С., Житков Н. П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966, т. 1. [6] Тихонов А. Н., Гласко В. Б. ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 3, с. 463.

Поступила в редакцию
16.04.80