В физических задачах функцию возмущения имеет смысл учитывать лишь в условиях (или для тех моментов времени), когда число возмущенных частиц в области энергий x, $x+dx$ больше равновесного числа частиц в этой же области. Если в системе происходит накопление частиц, то из (14), (15) видно, что в области $x \sim x_0$ при $\varphi(x)=0$ это условие выполняется для моментов времени $\tau < (\sqrt{\pi}/2)\, x_0^{-3/2}\, e^{x_0}$ причем уже для $x_0 \geqslant 5$ $\tau \leqslant 12$. В типичных условиях, например в экспериментах, рассмотренных в [6], накопления частиц не происходит (термализованные частицы удаляются из системы с помощью эффективного химического захвата), поэтому в реакции практически участвуют только возмущенные частицы.

В заключение подчеркнем, что проведенное рассмотрение выявило типичную для химии горячих атомов картину термализации быстрых частиц в атмосфере инертного газа, справедливую как для рэлеевского, так и для лоренцевского газов.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность Е. В. Ступоченко за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ступоченко Е. В. Статистическая теория систем с источниками частиц. Докт. дис. М., 1951 (МГУ). [2] Ступоченко Е. В. ДАН СССР, 1949, **67**, с. 447. [3] Ступоченко Е. В. ДАН СССР, 1949, **67**, с. 635. [4] Ступоченко Е. В. ЖЭТФ, 1949, **19**, с. 493. [5] Ступоченко Е. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1953, № 8, с. 57 [6] Jhon M. S., Dahler J. S. J. Chem. Phys., 1979, **70**, p. 5292. [7] Koura K. J. Chem. Phys., 1976, **65**, p. 2156. [8] Andersen K., Shuler K. E. J. Chem. Phys., 1964, **40**, p. 633. [9] Сафарян М. Н., Ступоченко Е. В. Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1964, № 4, с. 29. [10] Ступоченко Е. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1974, № 2, с. 246. [11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, т. 2.

Поступила в редакцию
16.04.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 62—50

СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ КЛАССА СИСТЕМ АВТОРЕГУЛИРОВАНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ЗВЕНО, ОПИСЫВАЕМОЕ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. А. Бендриков, Л. Д. Лозинский

(кафедра физики колебаний)

1. Рассмотрим замкнутую систему авторегулирования, структурная схема которой представлена на рис. 1.

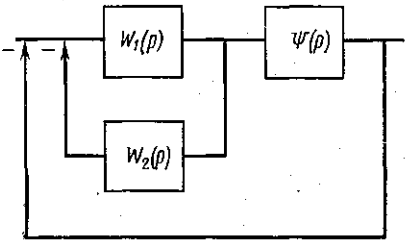

Рис. 1

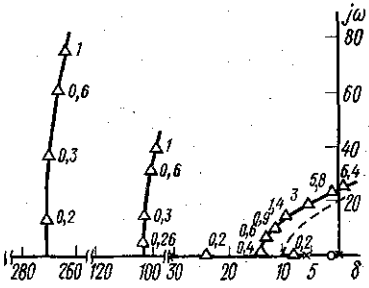

Рис. 2

Объект регулирования описывается одномерным уравнением теплопроводности и представляет собой нагреваемое (охлаждаемое) тело классической формы: бесконечная пластина, бесконечный цилиндр, шар. Регулирующим воздействием на объект является изменение потока тепла или температуры на границе тела, а регулируемой величиной — температура при фиксированном значении пространственной координаты. Вывод передаточных функций для таких объектов приведен в работе [1], а также, без использования термина «передаточная функция», в курсах теплопроводности [2, 3].

Передаточные функции рассматриваемого класса объектов можно записать следующим образом: $\Psi(p)=A(p)/B(p)$.

Для бесконечной пластины и для шара

$$\Psi(p)=h_0\frac{\varepsilon_1\operatorname{ch}(q_1)+h_1q_1^{\alpha}\operatorname{sh}(q_1)}{\varepsilon_2\operatorname{ch}(q_2)+h_2q_2^{\beta}\operatorname{sh}(q_2)}.$$

Для бесконечного сплошного цилиндра

$$\Psi(p)=h_0\frac{\varepsilon_1I_0(q_1)+h_1q_1^{\alpha}I_1(q_1)}{\varepsilon_2I_0(q_2)+h_2q_2^{\beta}I_1(q_2)}.$$

Для бесконечного полого цилиндра

$$\Psi(p)=h_0\frac{h_1\sqrt{p}\,\eta(1,2)+h_2\theta_0(1,2)}{h_3p\theta_1(3,2)+h_4\sqrt{p}\,\eta(3,2)+h_5\sqrt{p}\,\eta(2,3)+h_6\theta_0(2,3)}.$$

В формулах приняты обозначения: $q_i=T_i\sqrt{p}$, T_i — неотрицательные параметры («постоянные времени»), $T_3>T_2\geqslant T_1$; h_i — действительные неотрицательные параметры; ε_1, ε_2, α, β — целочисленные параметры, введенные для удобства записи различных передаточных функций в виде одного выражения. Они могут принимать значения: $\varepsilon_1=0$ или 1, $\varepsilon_2=0$ или 1, $\alpha=\pm1$; $\beta=\pm1$. Функции $\theta_\nu(i,j)$ и $\eta(i,j)$ выражаются следующим образом:

$$\theta_\nu(i,j)=I_\nu(q_i)K_\nu(q_j)-I_\nu(q_j)K_\nu(q_i),$$

$$\eta(i,j)=I_0(q_i)K_1(q_j)+I_1(q_j)K_0(q_i),$$

где $I_\nu(q)$ и $K_\nu(q)$ — модифицированные бесселевы функции от q индекса ν.

К такому же виду, как и $\Psi(p)$, приводятся передаточные функции для многих других объектов с распределенными параметрами. Заметим, что, как следует из вида $\Psi(p)$, все подобные объекты обусловливают наличие «распределенного запаздывания» в системе регулирования.

Передаточные функции регулятора $W_1(p)$ и корректирующего звена $W_2(p)$ представляют собой отношение полиномов от p:

$$W_1(p)=\frac{KQ(p)}{R(p)},\qquad W_2(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Степени полиномов $R(p)$, $Q(p)$, $F_1(p)$, $F_2(p)$ соответственно равны n, m, f_1, f_2. Коэффициент усиления обозначен K.

Вначале будем предполагать, что $W_2(p)\equiv0$ и система является одноконтурной. Характеристическое уравнение рассматриваемой системы имеет вид

$$B(p)R(p)+KA(p)Q(p)=0. \qquad (1)$$

Для изучения динамических свойств системы нужно располагать информацией о траекториях корней (1) при изменении K от 0 до ∞.

2. Несмотря на сложность выражений $\Psi(p)$, метод траекторий корней [4] может быть эффективно применен для данного класса систем [5]. Функции $A(p)$ и $B(p)$ обладают следующими свойствами, имеющими ключевое значение для использования метода траекторий корней: 1) они являются однозначными целыми функциями с порядком роста меньше единицы, 2) асимптотика их определяется экспонентой: $e^{\tau\sqrt{p}}$ $(\tau>0)$, 3) они имеют бесконечное число нулей на отрицательной части действительной оси. Действительно, функции $\mathrm{ch}(q)$, $I_0(q)$, $q^{\alpha}\,\mathrm{sh}(q)$, $q^{\alpha}I_1(q)$ представляются в виде ряда, содержащего только четные степени q. Функции $K_0(q)$ и $K_1(q)$ содержат в разложении $\ln q$, но в выражениях для $\theta_\nu(i, j)$ и $\eta(i, j)$ логарифмы сокращаются, а член ряда со степенью —1, возникающий благодаря $K_1(q)$ в $\theta_1(i, j)$ и $\eta(i, j)$, отсутствует в произведениях $q\theta_1(i, j)$ и $q\eta(i, j)$. Таким образом, все входящие в выражения для $A(p)$ и $B(p)$ функции представляются сходящими на всей плоскости рядами, содержащими p только в целой степени. На основании асимптотических соотношений

$$\mathrm{ch}(q)\sim\mathrm{sh}(q)\sim 0{,}5e^{q};\ I_\nu(q)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi q}}e^{q};\ K_\nu(q)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2q}}e^{-q}$$

делается заключение о порядке роста функций $A(p)$ и $B(p)$ и их асимптотике.

Нули функций $A(p)$ и $B(p)$ исследовались в большом числе работ. Подробная библиография дана в [2, 3]. Отметим, что для случая $\Psi_3(p)$ имеются в виду физически допустимые значения параметров h_i (они не являются независимыми), а в случаях $\Psi_1(p)$ и $\Psi_2(p)$ для изучения нулей $A(p)$ и $B(p)$ очень просто может быть использован корневой годограф [5].

Так как $A(p)$ и $B(p)$ — целые функции с порядком роста меньше единицы, то их разложения в бесконечные произведения не содержат экспоненциальных множителей и имеют вид

$$A(p)=A_1\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{p}{a_i}\right),\qquad B(p)=B_1p^t\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{p}{b_i}\right),\tag{2}$$

где $A_1=A(0)$, $B_1=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{B(p)}{p^t}$, $t=0$ или 1, a_i и b_i — корни $A(p)$ и $B(p)$.

Отметим, что числитель $\Psi(p)$ не может иметь нулевого корня, поэтому соответствующие значения параметров в выражении для $\Psi(p)$ исключаются из рассмотрения.

На основании формул (2) уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$p^{t_1}\prod_{j=1}^{n_1}\left(1-\frac{p}{r_j}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{p}{b_i}\right)+\rho\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{p}{d_j}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{p}{a_i}\right)=0,\tag{3}$$

где r_j и d_j — корни многочленов $R(p)$ и $Q(p)$, $\rho=\dfrac{KA_1Q_1}{B_1R_1}$, Q_1 и R_1 — константы, возникающие при записи многочленов по аналогии с формой бесконечного произведения, $t_1=t+(n-n_1)$.

3. Перейдем к рассмотрению свойств корневого годографа (1). Годограф имеет бесконечное (но счетное) число ветвей, начинающихся при увеличении K от нуля из точек b_i и r_j и заканчивающихся при $K\to\infty$ в точках a_i и d_j, а также в бесконечной точке. Возникновение и исчезновение корней возможно только в бесконечной точке. Эти свойства следуют из того, что все входящие в (1) функции являются целыми и удовлетворяют условию: $f(\bar{p})=\overline{f(p)}$, поэтому траектории корней симметричны относительно действительной оси. Дальнейшее рассмотрение будет проведено на основе использования уравнения фаз и уравнения модуля параметра, которые запишем, вводя обозначение

$$\lambda(p)=\arg\left\{\frac{B(p)R(p)}{A(p)Q(p)}\right\},$$

в следующем виде:

$$\lambda(p)=\pi(2l-1),\ l=1,2,\ldots;\qquad |K|=\left|\frac{B(p)R(p)}{A(p)Q(p)}\right|.$$

Величину $\lambda(p)$ можно записать, используя (3):

$$\lambda(p)=\arg p^{t_1}+\sum_{j=1}^{n_1}\arg\left(1-\frac{p}{r_j}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\arg\left(1-\frac{p}{b_i}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\arg\left(1-\frac{p}{d_j}\right)-\sum_{i=1}^{\infty}\arg\left(1-\frac{p}{a_i}\right).\qquad(4)$$

Такая запись позволяет без вычислений определить участки действительной оси, принадлежащие годографу при $K>0$.

Соотношение (4) может быть эффективно применено для построения траекторий, так как корни a_i и b_i находятся на отрицательной части действительной оси и соответствующие ряды в выражении для $\lambda(p)$ достаточно быстро сходятся.

Для изучения уходящих к бесконечной точке траекторий заменим в выражении для $\lambda(p)$ функции $A(p)$ и $B(p)$ их асимптотическими представлениями. Тогда функция $\lambda(p)$ примет вид

$$\lambda(p)\sim G(p,\sqrt{p})\,e^{\tau\sqrt{p}},$$

где $G(p,\sqrt{p})$ дробно-рациональная функция от p и $\sqrt{p}$.

Аргумент (фаза) $e^{\tau\sqrt{p}}$ будет равен $\pi(2l-1)$ только при изменении $p=\delta+j\omega$ в плоскости по параболам

$$\delta=\frac{1}{4N^2}\omega^2-N^2,\qquad N=\frac{\pi(2l-1)}{\tau},\ l=1,2,\ldots\qquad(5)$$

На этих параболах при $\delta\to\infty$ аргумент $G(p,\sqrt{p})$ будет стремиться к нулю. Следовательно, согласно уравнению фаз, асимптотика уходящих к бесконечной точке траекторий определяется параболами (5). Тот факт, что корни по этим траекториям уходят к бесконечной точке, а не приходят из нее, устанавливается по уравнению модуля параметра: из условия $\delta\to\infty$ следует, что $K\to\infty$.

Для примера на рис. 2 приведен годограф системы для случая

$$\Psi(p)=\frac{1}{I_0(\sqrt{p})},\quad W_1(p)=\frac{p+1}{p}.$$

Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$pI_0(\sqrt{p})+K(p+1)=0.$$

Пунктиром на рис. 2 показаны асимптоты.

4. Одноконтурные системы теряют устойчивость при возрастании K. Это следует из того, что уходящие в бесконечность траектории стремятся к параболам (5). Однако и для систем с объектами рассматриваемого типа можно добиться устойчивости при $K\to\infty$, если воспользоваться методом [6]. Откажемся от условия $W_2(p)\equiv 0$ и рассмотрим двухконтурную систему. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$B(p)R(p)F_2(p)+K[F_1(p)B(p)Q(p)+F_2(p)Q(p)A(p)]=0. \qquad (6)$$

Выражение для $\lambda(p)$ можно записать в виде

$$\lambda(p)=\arg\left\{\frac{R(p)F_2(p)}{F_1(p)Q(p)+F_2(p)Q(p)\Psi(p)}\right\}.$$

При $p\to\infty$ вне ε — сектора, показанного на рис. 3, второе сла-

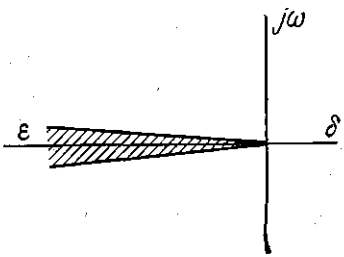

Рис. 3

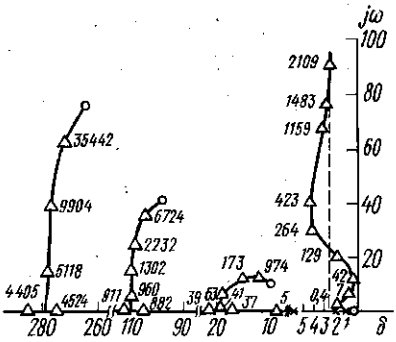

Рис. 4

гаемое в знаменателе стремится к нулю. Этот факт следует из того, что если $\arg p\neq\pi$, то асимптотика $\Psi(p)$ определяется $e^{-T\sqrt{p}}$ при физически допустимых значениях параметров $\Psi(p)$. Следовательно, для $\lambda(p)$ справедливо выражение

$$\lambda(p)\sim\arg\left\{\frac{R(p)F_2(p)}{Q(p)F_1(p)}\right\}$$

и уходящие в бесконечность траектории (6) определяются уходящими в бесконечность траекториями вспомогательного уравнения

$$R(p)F_2(p)+\rho_1Q(p)F_1(p)=0.$$

Таким образом, если асимптоты (6) и предельные точки (6) лежат в левой полуплоскости, то система с характеристическим уравнением (6) будет устойчива при $K\to\infty$.

Для иллюстрации на рис. 4 приведен годограф системы рассматриваемого типа, устойчивой при $K\to\infty$. Передаточные функции имеют вид

$$\Psi(p)=\frac{1}{I_0(\sqrt{p})},\qquad W_1(p)=\frac{K}{0{,}25p^2+p+1},\qquad W_2(p)=\frac{p}{p+1}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$I_0(\sqrt{p})\,(0{,}25p^2+p+1)\,(p+1)+K[pI_0(\sqrt{p})+(p+1)]=0.$$

Асимптоты этого уравнения определяются уравнением

$$(0{,}25p^2+p+1)\,(p+1)+Kp=0.$$

Это уравнение имеет вертикальную асимптоту с центром в точке $\delta=-2{,}5$, показанную на рис. 4 пунктиром.

В заключение отметим, что методы синтеза [6] полностью справедливы и для систем с объектами рассматриваемого типа. Доказательство этого факта в общем случае, когда K нелинейно входит в характеристическое уравнение, приведено в работе [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Маковский В. А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. М.: Металлургия, 1971. [2] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. [3] Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. [4] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. [5] Лозинский Л. Д. Системы автоматического регулирования с распределенными параметрами. М.: МИНХиГП, 1979. [6] Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. [7] Лозинский Л. Д. В кн.: Средства и системы автоматического управления технологическими процессами добычи, сбора и подготовки продукции скважин. М.: МИНХиГП, 1979, деп.

Поступила в редакцию
22.04.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 539.12:530.145

ИЗЛУЧЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Г. А. Чижов, О. Ф. Дорофеев

(кафедра квантовой теории)

Наиболее близкое к классическому квантовое описание осциллятора достигается с помощью когерентных состояний [1], минимизирующих соотношение неопределенностей $\Delta x\Delta p_x\geqslant\pi/2$. Когерентные состояния определяются непрерывными параметрами — координатой и скоростью центра гауссова пакета. Однако использование когерентных состояний при расчетах связано с трудностями из-за переполнения системы функций, что исключает, например, возможность введения понятия вероятности перехода, обычного при использовании полной ортонормированной системы стационарных состояний.

Нетрудно убедиться, что любое когерентное состояние будет основным в системе, связанной с центром пакета. Для этого можно рассмотреть осциллятор в переменных t, ξ, y, z, где $\xi=x-x_0(t)$ является отклонением от классического закона движения. Уравнение Шредингера с оператором Гамильтона

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi}+m\dot{x}_0\right)^2+\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right\}+\frac{k\xi^2}{2}+kx_0\xi$$

подстановкой

$$\Psi=\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p_\perp^2}{2m}t+\mathbf{p}_\perp\mathbf{r}_\perp\right)+\frac{i}{\hbar}m\dot{x}_0\right\}\psi_n(t,\xi),\qquad(1)$$