

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$I_0(\sqrt{p})(0,25p^2 + p + 1)(p + 1) + K[pI_0(\sqrt{p}) + (p + 1)] = 0.$$

Асимптоты этого уравнения определяются уравнением

$$(0,25p^2 + p + 1)(p + 1) + Kp = 0.$$

Это уравнение имеет вертикальную асимптоту с центром в точке $\delta = -2,5$, показанную на рис. 4 пунктиром.

В заключение отметим, что методы синтеза [6] полностью справедливы и для систем с объектами рассматриваемого типа. Доказательство этого факта в общем случае, когда K нелинейно входит в характеристическое уравнение, приведено в работе [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Маковский В. А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. М.: Металлургия, 1971. [2] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. [3] Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. [4] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. [5] Лозинский Л. Д. Системы автоматического регулирования с распределенными параметрами. М.: МИНХиП, 1979. [6] Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. [7] Лозинский Л. Д. В кн.: Средства и системы автоматического управления технологическими процессами добычи, сбора и подготовки продукции скважин. М.: МИНХиП, 1979, деп.

Поступила в редакцию
22.04.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 539.12:530.145

ИЗЛУЧЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Г. А. Чижов, О. Ф. Дорофеев

(кафедра квантовой теории)

Наиболее близкое к классическому квантовое описание осциллятора достигается с помощью когерентных состояний [1], минимизирующих соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \gg \pi/2$. Когерентные состояния определяются непрерывными параметрами — координатой и скоростью центра гауссова пакета. Однако использование когерентных состояний при расчетах связано с трудностями из-за переполнения системы функций, что исключает, например, возможность введения понятия вероятности перехода, обычного при использовании полной ортонормированной системы стационарных состояний.

Нетрудно убедиться, что любое когерентное состояние будет основным в системе, связанной с центром пакета. Для этого можно рассмотреть осциллятор в переменных t, ξ, y, z , где $\xi = x - x_0(t)$ является отклонением от классического закона движения. Уравнение Шредингера с оператором Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left\{ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi} + m\dot{x}_0 \right)^2 + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{k\xi^2}{2} + kx_0\xi$$

подстановкой

$$\Psi = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_1^2}{2m} t + p_1 r_1 \right) + \frac{i}{\hbar} m\dot{x}_0 \xi \right\} \psi_n(t, \xi), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$, приводится к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{k\xi^2}{2} \right) \psi_n,$$

решение которого можно выбрать в виде полной ортонормированной системы функций

$$\psi_n(t, \xi) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_n t \right\} \chi_n(\xi), \quad (2)$$

причем $\chi_n(\xi)$ — известные функции стационарных состояний гармонического осциллятора. Функции (1) в лабораторной системе t, x, y, z можно записать в виде (см. также [2])

$$\begin{aligned} \Psi_{n,p_\perp}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\left(E_n + \frac{p_\perp^2}{2m} \right) t + \int L_{\text{кл}} dt \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}_\perp + m\dot{x}_0(t) \cdot x] \right\} \chi_n(x - x_0(t)), \\ L_{\text{кл}} &= \frac{1}{2} m\dot{x}_0^2(t) - \frac{1}{2} kx_0^2(t). \end{aligned}$$

Полученная система функций будет ортонормированной при заданном законе движения $x_0(t)$. Состояния (2) с $n \neq 0$ не являются когерентными, не реализуют минимума соотношения неопределенностей, но представляют собой нерасплывающиеся волновые пакеты. При $n=0$, $\mathbf{p}_\perp=0$ эти функции совпадают с функциями когерентных состояний одномерного осциллятора, а при $n=1, 2, 3, \dots$ описывают возбуждения в выбранной неинерциальной системе.

Волновая функция (2) может быть разложена по стационарным состояниям одномерного осциллятора

$$\psi_n(t, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(t, x),$$

где коэффициенты разложения c_k имеют вид

$$\begin{aligned} c_k &= \exp \left[i\Omega(k-n)t - \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \alpha^2 - \alpha^{*2} \right] \times \\ &\times \begin{cases} \sqrt{k!/n!} (-1)^{n-k} \alpha^{*n-k} L_k^{n-k}(|\alpha|^2), & k \leq n, \\ \sqrt{n!/k!} \alpha^{k-n} L_n^{k-n}(|\alpha|^2), & k > n, \end{cases} \end{aligned}$$

причем α является собственным значением оператора уничтожения

$$\hat{a} e^{i\Omega t} \psi_0(t, \xi) = \alpha \psi_0(t, \xi),$$

имеющего в координатном представлении вид

$$\hat{a} = l_0/\sqrt{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + x/l_0 \sqrt{2},$$

а $l_0 = \sqrt{\hbar/m\Omega}$ — размер гауссова пакета в данном поле.

Средняя энергия, вычисленная по функциям $\Psi_{n,p_\perp}$,

$$\bar{E} = \int \Psi_{n,p_\perp}^* \hat{H} \Psi_{n,p_\perp} d^3x = E_n + \frac{p_\perp^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 x_0^2}{2} = \text{const},$$

удовлетворяет классической теореме Кёнига и складывается из энергии движения центра пакета и энергии относительного движения, т. е. квантового возбуждения E_n .

Вероятность перехода из когерентного состояния в состояние, характеризующее квантовыми числами $n, \mathbf{p}_\perp$ с излучением фотона с волновым вектором $\mathbf{x}$, определяется выражением

$$w_{n, \mathbf{p}_\perp}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} |B_{n, \mathbf{p}_\perp}^*|^2 = \frac{1}{L^3} \frac{2\pi \hbar}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t dt \cdot e^{i\omega t} \mathbf{a}_x^* \mathbf{j}(t) \right|^2,$$

где

$$B_{n, \mathbf{p}_\perp}^* = \frac{e}{mc} \frac{1}{L^{3/2}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\omega}} \int_0^t dt \cdot e^{i\omega t} \mathbf{a}_x^* \int d^3x \Psi_{n, \mathbf{p}_\perp}^* e^{-i\mathbf{x}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Psi_0.$$

Учитывая, что

$$|(\mathbf{a}_x^* \mathbf{j})|^2 = |\mathbf{j}|^2 \left(1 - \frac{\kappa_x^2 c^2}{\omega^2} \right),$$

и проводя разложение в ряд Фурье, запишем вероятность перехода в виде

$$\begin{aligned} w_{n, \mathbf{p}_\perp}(\mathbf{x}) &= \frac{e^2 c^2 \beta}{(2\pi)^3} \frac{2^n}{n!} \sum_{\nu=n}^{\infty} (\kappa_x l_0)^{2\nu} \times \\ &\times e^{-2l_0^2 \kappa_x^2} \left(1 - \frac{\kappa_x^2 c^2}{\omega^2} \right) \frac{2\pi}{\hbar \omega} \frac{1}{x_0^2 \kappa_x^2} \{ \nu - n + 2l_0^2 \kappa_x^2 \}^2 \times \\ &\times J_\nu^2(\kappa_x x_0) 2\pi \delta \left(\omega + \frac{p_\perp^2}{2m\hbar} + (n - \nu)\Omega \right) \delta \left(\frac{p_\perp}{\hbar} + \kappa_\perp \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Наличие δ -функций в (3) обеспечивает выполнение закона сохранения импульса при излучении фотона $\kappa_\perp = \mathbf{p}_\perp / \hbar$ и позволяет дать следующую интерпретацию акту излучения фотона частоты ω : спонтанное излучение происходит за счет перекачки энергии колебаний осциллятора на гармонике $\nu\Omega$ в энергию излучения $\hbar\omega$ и энергию возбуждения «внутренней степени свободы» $\hbar n\Omega$ при $n \neq 0$ с учетом отдачи.

Частота излучаемого фотона, определяемая из этих законов сохранения, имеет вид

$$\omega = \Omega \frac{mc^2}{\hbar \Omega \sin^2 \theta} \left[\sqrt{1 + 2s \frac{\hbar \Omega}{mc^2} \sin^2 \theta} - 1 \right],$$

где $s = \nu - n$ — номер излучаемой гармоники, а

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{e}_x \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}.$$

Для нерелятивистской частицы $s\hbar\Omega/mc^2 \ll 1$, поэтому, пренебрегая отдачей, получим $\omega = s\Omega$. В этом случае аргумент функции Бесселя

$$\kappa x_0 \cos \theta \approx s \frac{x_0 \Omega}{c} = s\beta,$$

где β — амплитуда скорости центра пакета.

Интенсивность излучения фотонов, определяемая обычным способом:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin \theta \int_0^{\infty} dk \cdot k^2 \hbar \omega_{n,p_{\perp}}(k),$$

может быть записана как сумма интенсивностей излучения отдельных гармоник:

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} W_s,$$

где

$$W_s = e^2 \Omega^2 s^2 \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \left(1 + \frac{1}{s} \frac{l_0^2}{\lambda_{изл}^2} \right)^2 \times \\ \times \exp \left\{ - \left(\frac{l_0}{\lambda_{изл}} \right)^2 \cos^2 \theta \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 \frac{l_0^2}{\lambda_{изл}^2} \cos^2 \theta \right)^n J_{n+s}^2(s \beta \cos \theta),$$

а $\lambda_{изл} = c/(s\Omega)$ — длина волны излучаемого фотона ($2\pi\lambda = \lambda$).

Характерными отличиями этого выражения от аналогичного выражения для s -гармоники осциллятора в стационарном состоянии является наличие суммы по n возбуждениям «внутренних степеней свободы» и множителя

$$\exp \left\{ - \left(\frac{l_0}{\lambda_{изл}} \right)^2 \cos^2 \theta \right\},$$

обеспечивающего эффективное подавление излучения с длиной волны

$$\lambda_{изл} < l_0.$$

Интересно сравнить полученное выражение с формулами классической электродинамики. Рассмотрим классическое излучение заряда, распределенного по гауссову закону. Пусть плотность заряда

$$\rho = e^2 |\Psi_0|^2 = e^2 \left(\frac{m \Omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \exp \left[- \left(\frac{x - x_0(t)}{l_0} \right)^2 \right] \delta(y) \delta(z),$$

где $x_0(t)$ — классический закон движения, а $\Psi_0(\xi)$ — нормированная функция основного состояния осциллятора. Интенсивность излучения, создаваемая таким распределением заряда,

$$W = \frac{e^2 \Omega^2}{c} \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin \theta \sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \theta \cdot s^2 J_s^2(s \beta \cos \theta) \exp \left\{ - \left(\frac{l_0}{\lambda_{изл}} \right)^2 \cos^2 \theta \right\},$$

что совпадает по структуре с квантовым выражением без учета отдачи и отличается от формулы Матвеева [3] для точечного заряда множителем

$$\exp \left\{ - \left(\frac{l_0}{\lambda_{изл}} \right)^2 \cos^2 \theta \right\}$$

в каждой гармонике. Это связано с тем, что при $n=0$ переход с излучением фотона осуществляется без изменения квантовых параметров (за исключением $p_{\perp}$ — импульса отдачи) и поэтому в точности

соответствует описанию процесса излучения в классической электродинамике без учета радиационного трения.

Переходы с возбуждением «внутренних степеней свободы» в нерелятивистском случае вносят малый вклад в интенсивность излучения (основной вклад дают члены с $n=0$), так как члены ряда по n быстро убывают; отношение двух последовательных членов ряда порядка $(s\beta \cdot l_0 / \lambda_{\text{изл}})^2 n^{-3}$.

Таким образом, в этом методе описания квантового осциллятора удается в рамках самосогласованной квантовомеханической задачи отделить влияние классического поля излучения от квантового описания состояния частицы.

Авторы признательны проф. И. М. Тернову, доц. В. Д. Кривченкову и В. Р. Халилову за полезные замечания и обсуждения задачи, а также Р. А. Рзаеву, предложившему рассмотреть задачу о квантовых флуктуациях в отклоняющих магнитных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974, с. 97. [2] Kodai Husimi. Progr. Theor. Phys., 1953, 9, N 4, p. 381. [3] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974, с. 90.

Поступила в редакцию
20.05.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2.

УДК 533.9.082.5

МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ИОНОВ СТРОНЦИЯ И БАРИЯ В РАЗРЯДЕ В ОХЛАЖДАЕМОМ ПОЛОМ КАТОДЕ

Л. М. Волкова, А. М. Девятон, В. Х. Фазлаев

(кафедра электроники)

Для понимания физики процессов, которые происходят в газоразрядных приборах, работающих с парами щелочноземельных металлов (например, лазеры на ионных линиях магния, стронция, кальция и бария [1, 2]), необходимо знать механизм образования их ионов.

Изучение механизма образования ионов Sr^+ и Ba^+ проводилось в разряде с аргоновым ($p=10-66$ Па) и гелиевым ($p=53,5-214$ Па) наполнениями в охлаждаемом проточной водой полем катоде ($\varnothing=0,015$ м, $l=0,1$ м), изготовленном из стронция или бария особой чистоты. Разрядный ток в гелиевом разряде изменялся от 50 до 400 мА, а в аргоновом — от 50 до 200 мА. Диапазоны разрядных токов и давлений газов-наполнителей определялись возможностью определения необходимых параметров разряда.

Нами были измерены: концентрация N_e , средняя энергия $\bar{\epsilon}$ и функция распределения электронов по энергиям $f(\epsilon)$ методом зондов Ленгмюра и методом второй производной тока на зонд с последующим применением формулы Дрюэстейна, концентрация атомов $N_{M(0)}$ и ионов N_{M+} бария и стронция в основном и возбужденных состояниях — по абсолютным интенсивностям и коэффициентам поглощения соответствующих спектральных линий атомов и ионов металлов, концентрация атомов N_B ($B=\text{He}, \text{Ar}$) гелия и аргона на резонансных и метастабильных уровнях — по измерению реабсорбции спектральных линий, оканчивающихся на этих уровнях.