СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Балдин А. М. и др. Ядерная физика, 1974, 20, № 6, с. 1201. [2] Parr J. et al. Phys. Rev. Lett., 1975, 34, p. 601. [3] Лобов Г. А., Маркушин В. Е., Соловьев В. В., Шапиро И. С. Письма в ЖЭТФ, 1976, 23, № 2, с. 118. [4] Кондратюк Л. В., Копелиович В. Б. Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, № 1, с. 88. [5] Лукьянов В. К., Титов А. И. ЭЧАЯ, 1979, 10, с. 815. [6] Стрикман М. И., Франкфурт Х. Х. Ядерная физика, 1980, 32, с. 1403. [7] Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л. Изв. АН СССР, сер. физ., 1978, 24, № 4, с. 868. [8] Гаспарян А. П., Никитин А. В., Троян Ю. А. Сообщения ОИЯИ, 1-5041, 1970. [9] Bugg D. et al. Phys. Rev., 1964, 133B, p. 1017. [10] Ferrari E., Selleri F. Phys. Rev. Lett., 1961, 7, p. 387.

Поступила в редакцию
12.06.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 534.24

О ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЕЛОМЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

В. В. Крылов

(кафедра акустики)

Среди многообразия типов волновых движений, известных в акустике, видное место принадлежит нормальным волнам, или волнам, распространяющимся в слоистых средах без изменения своей формы (волноводное распространение) [1, 2]. Поскольку получение полных дисперсионных зависимостей, описывающих совместное влияние внутренних физических механизмов и геометрии волновода на фазовые скорости нормальных волн, возможно лишь в немногочисленных частных случаях, имеет смысл выяснить возможность применения к величине $n(\omega)=c(\infty)/c(\omega)$, которую естественно называть коэффициентом преломления нормальных волн, дисперсионных соотношений, в том числе известных формул Крамерса — Кронига (см., например, [3—6])

$$\operatorname{Re} n(\omega)-1=\frac{1}{\pi}\,\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} n(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega', \tag{1}$$

$$\operatorname{Im} n(\omega)=-\frac{1}{\pi}\,\text{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} n(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'. \tag{2}$$

Здесь $c(\omega)$ — фазовая скорость нормальной волны, а интегралы понимаются в смысле главного значения.

Насколько нам известно, первая попытка использования соотношений типа Крамерса — Кронига для расчета фазовых скоростей нормальных волн была сделана в работе [7]. Однако возможность применимости дисперсионных соотношений к слоистым средам при этом не обосновывалась, что не могло не повлечь за собой неверные выводы. Предварительное рассмотрение показывает, что этот вопрос далеко не тривиален и заслуживает специального исследования. Результаты такого исследования и будут приведены ниже.

Напомним, что существование дисперсионных соотношений вида (1) и (2) обусловлено аналитичностью функции $n(\omega)$ в верхней или нижней полуплоскостях комплексного переменного ω, которая, в свою очередь, обычно следует из принципа причинности [3—6]. В случае нор-

мальных волн прямую связь с причинностью установить не удается. Поэтому при исследовании аналитичности $n(\omega)$ естественно исходить непосредственно из соответствующих дисперсионных уравнений, записывая их по возможности в наиболее общем виде. Некоторые выводы о характере особенностей функции $n(\omega)$ могут быть при этом сделаны с помощью использования теорем обращения аналитических функций и известных фактов теории волноводов.

Рассмотрим слоистую среду, в которой могут существовать нормальные волны, и будем считать, что для описания волновых движений в рассматриваемой среде достаточно одного скалярного уравнения. Уже в этом простейшем случае выявляются основные черты рассматриваемой задачи. Предположим, что в среде можно выделить однородный слой высоты h. Тогда волновое число двумерной нормальной волны $k(\omega)=\omega/c(\omega)$ связано с частотой ω общим дисперсионным уравнением [1]

$$V_1V_2\exp[2ik_0h(1-n^2)^{1/2}]=1, \tag{3}$$

где $V_1(n, \omega)$ и $V_2(n, \omega)$ — коэффициенты отражения от верхней и нижней границ однородного слоя, $k_0=\omega/c(\infty)$. Зависимости V_1 и V_2 от ω в общем случае характеризуют как физические свойства среды, например релаксацию, так и чисто геометрические интерференционные механизмы. Таким образом, аналитические свойства $n(\omega)$ определяются как физическими причинами, так и нетривиальным дисперсионным уравнением [3]. Заметим, что рассматриваемая ситуация в некотором смысле аналогична случаю электромагнитных волн в анизотропной плазме, показатель преломления которой связан с диэлектрической проницаемостью дисперсионным уравнением Френеля [6].

В соответствии с теоремой обращения (см., например, [8]) функция $n(\omega)$ может иметь точки ветвления порядка j в точке $a\neq\infty$, если производная обратной функции $d\omega/dn$ имеет нуль порядка j или полюс порядка $j+2$ в точке $n(a)$. Нетрудно показать, что при $\omega\neq0$ нули функции $d\omega/dn$ совпадают с нулями функции $d\omega/dk$, имеющей смысл комплексной групповой скорости. Обычная групповая скорость определяется при этом выражением $\mathrm{Re}(d\omega/dk)$ [9]. Обращая использованную выше теорему, видим, что $n(\omega)$ может иметь также полюсы, обусловленные точками ветвления $\omega(n)$. Таким образом, поведение функции $n(\omega)$ на плоскости комплексного переменного ω достаточно сложно и дисперсионные соотношения вида (1) и (2), вообще говоря, несправедливы. Основной причиной этого является появление точек ветвления $n(\omega)$ вне вещественной оси ω, положение которых на комплексной плоскости ω в общем случае не известно.

Важным исключением оказываются те случаи, когда точки ветвления $n(\omega)$ лежат на вещественной оси. Физически это означает, что групповая скорость рассматриваемой нормальной моды обращается в нуль на критической частоте. Последнее же может иметь место только в тех волноводах, в которых просачивание волны через слой невозможно [2]. Именно в этих случаях дисперсионные соотношения типа Крамерса — Кронига остаются справедливыми. Отметим, что установленная выше связь появления точек ветвления вне вещественной оси с возможностью просачивания волны через слой, или с волнами утечки, имеет глубокую аналогию с теорией рассеяния при наличии каналов реакций, в которой появление точек ветвления соответствует возможности открытия дополнительного канала [10].

Для иллюстрации сказанного выпишем дисперсионные соотношения в случае волновода с жесткими стенками, дисперсионное уравнение

которого хорошо известно. В целях наглядности мы, однако, будем исходить из формулы (3). Действительно, поскольку в рассматриваемом случае $V_1 = V_2 = 1$, получим непосредственно

$$n(\omega) = \left(1 - \frac{c^2(\infty)\pi^2 m^2}{\omega^2 h^2}\right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

В соответствии с изложенным функция $n(\omega)$ имеет на комплексной плоскости ω следующие особенности: точки ветвления при $\omega = \pm c(\infty)\pi m/h$ и простой полюс при $\omega = 0$. Проводя разрезы вдоль вещественной оси и интегрируя функцию $[n(\omega) - 1]/(\omega' - \omega)$ по контуру, проходящему вдоль верхних берегов разрезов и бесконечной верхней полуокружности, обычным образом [3, 4], получим дисперсионные соотношения вида (1) и (2), отличающиеся от последних лишь тем, что в правой части (2) появится дополнительный действительный член, обусловленный вычетом в точке $\omega = 0$ и аналогичный «полюсу проводимости» у функции диэлектрической проницаемости [3]. Если воспользоваться очевидной симметрией функции $n(\omega)$ из (4), а именно $n(-\omega) = n^*(\omega)$ (заметим, что в случае нормальных волн не существует общего физического принципа, позволяющего судить о свойствах симметрии $n(\omega)$), то дисперсионные соотношения можно записать с помощью интегралов по физической области частот:

$$\operatorname{Re} n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \text{V.P.} \int_0^\infty \frac{\omega' \operatorname{Im} n(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2} d\omega', \tag{5}$$

$$\operatorname{Im} n(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{V.P.} \int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Re} n(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2} d\omega' + \pi m/h\omega. \tag{6}$$

В пренебрежении истинным поглощением, обусловленным необратимыми процессами в среде, соотношения (5) и (6) связывают фазовую скорость распространяющейся нормальной волны с декрементом затухания поля на частотах ниже критической. Приведенный пример, разумеется, иллюстративен и не имеет большого практического значения, так как функция $n(\omega)$ в данном случае полностью известна. Тем не менее он представляет определенный методический интерес, поскольку широко распространено мнение, что всякая дисперсия должна сопровождаться поглощением.

В более общем случае трехслойной среды с резкими границами [1, 2] функция $n(\omega)$ может иметь точки ветвления как на верхней, так и на нижней полуплоскостях ω, что характеризует существующую в данном случае возможность утечки волны из слоя. Дисперсионные соотношения при этом не имеют места.

Основные выводы, приведенные выше для сред с резкими границами, справедливы и для сред с плавными переходными слоями [1]. В случае возможности просачивания волны через слой у функции $n(\omega)$ имеются точки ветвления, не лежащие на вещественной оси, и соотношения типа Крамерса — Кронига несправедливы. Типичным примером такой ситуации является полупространство Эпштейна — Газаряна [1], допускающее точное решение для $n(\omega)$. В наличии точек ветвления вне вещественной оси можно при этом убедиться непосредственно. Более интересными с точки зрения применения дисперсионных соотношений являются плавно изменяющиеся слои, сквозь которые просачивание волны невозможно. Примерами таких сред являются полупространство

с линейным запирающим слоем [1] и симметричный квадратичный слой [11]. Модули коэффициентов отражения от таких слоев равны единице при любых углах падения и дисперсионные соотношения вида (1) и (2), конечно, справедливы.

Аналогичные выводы можно сделать и по отношению к поверхностным волнам, характеризующимся частотной зависимостью фазовой скорости. Согласно вышеизложенному расположение точек ветвления на вещественной оси означает в данном случае невозможность утечки энергии поверхностной волны в объем среды. В большинстве физических ситуаций это условие не выполняется. Следовательно, дисперсионные соотношения не имеют места. Рассмотрим, например, дисперсионное уравнение для чисто капиллярных волн в сжимаемой невязкой жидкости [12]:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3 (1 - k_l^2/k^2)^{1/2}, \tag{7}$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, k_l — волновое число объемной волны в жидкости. Учет сжимаемости в данном случае принципиален, так как при получении дисперсионных соотношений проводится интегрирование по бесконечной полуокружности в плоскости ω. Из (7) видно, что нормальные капиллярные волны не могут существовать на достаточно высоких частотах, соответствующих $k(\omega) \leqslant k_l(\omega)$. С помощью описанной методики нетрудно показать, что этот факт математически характеризуется наличием у функции $1/c(\omega)$ точек ветвления, не лежащих на вещественной оси и приводящих к нарушению условий существования дисперсионных соотношений. Тот же вывод можно отнести и к поверхностным волнам типа Лява, принципиально не отличающимся от рассмотренных выше скалярных волн в слоях с резкими границами. Что касается поверхностных волн рэлеевского типа, распространяющихся в слоистом полупространстве, то для них трудно сделать какие-либо определенные заключения на основании изложенного скалярного подхода. Следует, однако, ожидать, что соотношения типа Крамерса — Кронига окажутся несправедливыми для слоев типа антиволновода [13] ввиду наличия в этом случае критических частот, выше которых рэлеевские волны распространяются с затуханием.

Таким образом, основной вывод, который может быть сделан на основании настоящей работы, состоит в том, что дисперсионные соотношения применимы к коэффициентам преломления нормальных волн лишь для ограниченного числа типов сред, а именно для сред, в которых невозможна утечка энергии нормальных волн. Этот факт значительно снижает их ценность по сравнению, например, со случаем неограниченного пространства. Несмотря на это, применение дисперсионных соотношений к нормальным волнам может в ряде случаев оказаться полезным как с практической, так и с методологической точек зрения.

Автор благодарен проф. В. А. Красильникову за поддержку в работе и акад. Л. М. Берховских за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1957. [2] Исакович М. А. Общая акустика. М., 1973. [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1959. [4] Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. М., 1976. [5] Леонтович М. ЖЭТФ, 1961, **40**, с. 907. [6] Гинзбург В. Л., Мейман Н. Н. ЖЭТФ, 1964, **46**, с. 243. [7] Заславский Ю. М. В кн.: 9-я Всес. акуст. конф. Доклады. М., 1977, с. 29. [8] Гур-

вич А. Г., Курант Р. Теория функций. М., 1968. [9] Сухи. ТИИЭР, 1974, 62, с. 185. [10] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., 1969. [11] Маркузе Д. Оптические волноводы. М., 1974. [12] Красильников В. А., Крылов В. В. Акуст. журн., 1979, 25, с. 408. [13] Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М., 1972.

Поступила в редакцию
12.06.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 539.1.078

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ АППАРАТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ АНАЛИЗАТОРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ МАГНИТОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

Т. Б. Бондарева, В. И. Лазарев

(НИИЯФ)

Особенность работы дифференциальных спектрометров, предназначенных для исследований магнитосферной плазмы и основанных на использовании электростатического анализатора, заключается в измерении потоков частиц, имеющих изотропное распределение в пределах угла зрения прибора и сплошной энергетический спектр.

Основные характеристики электростатических анализаторов, применявшихся при космических исследованиях, рассматривались в ряде работ [1—5].

В работах [1, 2] было дано пространственное представление функции пропускания сферического и цилиндрического анализаторов по энергии и углу для узкого пучка частиц в виде «диаграммы пропуска-

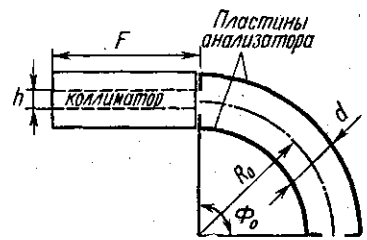
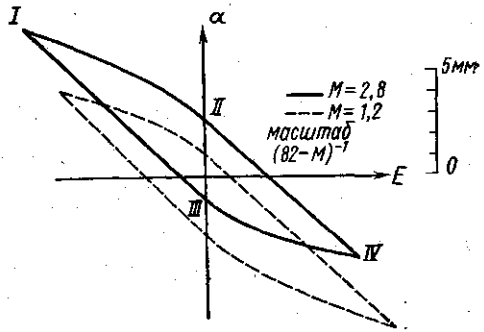


Рис. 1. Основные конструктивные элементы электростатического анализатора. Численные значения параметров: $h=1$ мм, $F=15$ мм, $R_0=80$ мм, $\Phi_0=90°$, $d=4$ мм



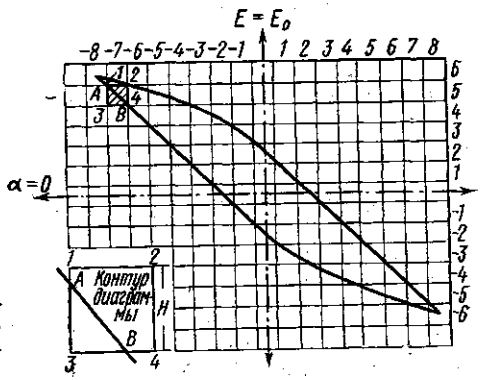


Рис. 2. Вид диаграмм пропускания анализатора для узкого пучка и схема к расчету элементов матрицы пропускания анализатора