УДК 530.145

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Ю. Г. Павленко

(кафедра теоретической физики)

Наиболее общими методами решения сложных дифференциальных уравнений являются метод усреднения [1—2] и теория возмущений [3—4]. Применение метода усреднения позволяет заменить исходную систему уравнений существенно более простой усредненной системой, решение которой является самостоятельной задачей. Теория возмущений непосредственно дает рецепт вычисления поправок к «нулевому приближению». Несмотря на универсальный характер этих методов, в общей схеме усреднения неизвестен алгоритм, позволяющий получить уравнения n-го приближения, а в теории возмущений собственные функции и собственные значения обычно находят в результате процедуры собирания членов одного порядка малости, кроме того, отсутствует алгоритм построения высших приближений. С последней проблемой связаны методы оценок остаточных членов, получившие развитие лишь в последнее время [5].

Большинство асимптотических методов объединяет то, что они исходят из уравнений второго порядка. Однако возможности гамильтонова формализма первого порядка существенно шире. Из работ Боголюбова [6], получившего фундаментальные результаты в теории сверхтекучести и сверхпроводимости, стало ясно, что метод канонических преобразований является самым мощным методом интегрирования систем дифференциальных уравнений.

В настоящей статье рассмотрены методы интегрирования систем, представленных в гамильтоновой форме. В первой части на основе метода канонических преобразований получено общее решение. Показано, что произвольная функция координат и импульсов, зависящая от времени в силу системы, может быть представлена в виде P-упорядоченной экспоненты. В качестве примера рассмотрены уравнения, приводящие к специальным функциям. В третьей части предложен общий метод построения уравнений и гамильтониана в усредненных переменных. В последней части статьи получен новый вывод уравнений, определяющих собственные функции и собственные значения. Указан алгоритм вычисления собственных функций, собственных значений и произвольной функции матричных элементов во всех порядках по малому параметру.

1. Преобразование и решение канонических уравнений. Пусть R^{2s} — четномерное фазовое пространство (x, p) с координатами $x_k=z_{2k-1}$, $p_k=z_{2k}$, в котором определена симплектическая структура, задаваемая 2-формой $\omega=\omega_{ik}dz_i\wedge dz_k$. Кососимметрическая метрика $\omega_{ik}=-\omega_{ki}$ является матрицей, имеющей блочный вид, причем на ее главной диагонали выстроены 2×2 матрицы с элементами $\sigma_{12}=-\sigma_{21}=1$. Скобкой Пуассона (СП) функций F и G является кососкалярное произведение их градиентов [7]

$$[F, G]=\omega_{ik}\frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial G}{\partial z_k}.$$

Полагая $F=z_\mu$, $G=H(z, t)$, получим канонические уравнения с гамильтонианом $H(z, t)$:

$$\dot{z}_\mu = \omega_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial z_\nu}. \tag{1}$$

Произвольная динамическая величина $A(z)$ удовлетворяет в силу системы (1) уравнению

$$\dot{A}=[A, H]. \tag{2}$$

Представим гамильтониан в виде $H=H_0(z)+\varepsilon R(z, t)$ и произведем каноническое преобразование $z=z(z', t)$ к новым переменным z' с помощью производящей функции $F(x, p', t)$. Если s постоянных в полном интеграле $F(x, C, t)$ уравнения Гамильтона—Якоби

$$H_0\left(x, p=\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{3}$$

выбрать в качестве новых импульсов, то новые и старые переменные связаны соотношением [8]

$$p=\frac{\partial F}{\partial x}, \quad x'=\frac{\partial F}{\partial p'}. \tag{4}$$

В новых переменных уравнения движения имеют форму (1) с новым гамильтонианом $\varepsilon R'(z', t)=\varepsilon R(z(z', t), t)$, а (2) можно представить в виде интегрального уравнения

$$A'(z', t)=A'(z'_0, t)+\int_{t_0}^{t}[A'(z'_1, t), \ \varepsilon R'(z'_1, t_1)]\, dt_1. \tag{5}$$

Здесь $A'(z', t)=A(z(z', t))$, $z'_a=z'(t_a)$. Переход от (2) к (5) известен как метод вариации канонических постоянных [9]. Решение этого уравнения можно представить в виде ряда [10]

$$A(z(t))=\sum \varepsilon^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \times$$
$$\times [\ldots [A'(z'_0, t), \ R'(z'_0, t_1)]\, R'(z'_0, t_2)] \ldots] R'(z'_0, t_n)]. \tag{6}$$

СП в (6) вычисляются по переменным z', взятым в момент времени t_0. Предполагается, что функция $\varepsilon R(z, t)$ «включается» адиабатически [11]. Очевидно, (6) является обобщением метода последовательных приближений Пикара для гамильтоновых систем. Можно показать [12—13], что если ядро уравнения (5) является голоморфной функцией переменных z', t в некоторой области D, то решение (6) голоморфно внутри окружности некоторого радиуса. Построив аналитическое продолжение, мы найдем аналитическую функцию $A(z(t))$.

Правую часть (6) можно представить в виде P-упорядоченной экспоненты [11]

$$A(z(t))=P\exp\left(-\varepsilon\int_{t_0}^{t}\omega_{ik}\frac{\partial R(z'_0 t')}{\partial z'_{k0}}\frac{\partial}{\partial z'_{i0}}\,dt'\right)A'(z'_0, t). \tag{7}$$

Решение (7) определяет эволюцию произвольной функции, порождаемую каноническим преобразованием $z(t_0)\to z(t)$. Каждому члену ряда можно поставить в соответствие связные и несвязные диаграммы [14].

2. Приложение к теории спецфункций. Любое уравнение второго порядка

$$A(\tau)u_{\tau\tau}+B(\tau)u_{\tau}+C(\tau)u=0 \tag{8}$$

можно записать в лагранжевой форме [15]. Лагранжиан, приводящий к уравнению (8),

$$L(u, u_{\tau}, \tau)=\frac{1}{2}m(\tau)u_{\tau}^2-\frac{1}{2}r(\tau)u^2, \tag{9}$$

где $m=A\lambda$, $r=C\lambda$, λ — интегрирующий множитель. Например, для вырожденной гипергеометрической функции $u=F(a, c; \tau)$: $m=e^{-\tau}\tau^c$, $r=-ae^{-\tau}\tau^{c-1}$. Если перейти к новым независимой переменной t и функции x, полагая

$$u=\left(\frac{\dot{\tau}}{m}\right)^{1/2}x,\ t=\int\frac{d\tau}{\dot{\tau}},\ \dot{\tau}=f(\tau),\ \dot{\tau}\equiv\frac{d\tau}{dt},$$

то лагранжиан (9) приобретает вид

$$L(x, \dot{x}, t)=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}Q(t)x^2, \tag{10}$$

$$Q(t)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\ln\frac{\dot{\tau}}{m}-\frac{1}{4}\left[\frac{d}{dt}\ln\frac{\dot{\tau}}{m}\right]^2+\frac{r\dot{\tau}^2}{m}.$$

В терминах механики (10) описывает осциллятор с переменной частотой. Лагранжиану (10) соответствует квадратичный гамильтониан

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}Q(t)x^2. \tag{11}$$

Найдем в качестве примера решение уравнения $\ddot{x}-tx=0$ для функции Эйри. В этом случае $Q(t)=-t$. Если теперь выбрать $H_0=\frac{1}{2}p^2$, то из (3), (4) найдем

$$F(x, p', t)=xp'-\frac{1}{2}p'^2t,$$

$$x=x'+p't,\quad p=p',$$

$$\varepsilon R=-\frac{1}{2}t(x'+p't)^2.$$

Нулевое приближение соответствует равномерному движению. Полагая в (6) $A=x$, получим

$$x=x_0'+p_0't+x_0'\frac{t^3}{3!}+p_0'\frac{2}{4!}t^4+\ldots=C_1(t)x_0'+C_2(t)p_0'.$$

Здесь C_1, C_2 — линейно-независимые решения, связанные с функциями Макдональда [16]:

$$C_1(t)=3^{-\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{t}\,I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$C_2(t)=3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\sqrt{t}\,I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right). \tag{12}$$

Фундаментальная СП функций x и $p=\dot{x}$ совпадает с вронскианом $[x, p]=C_1\dot{C}_2-\dot{C}_1C_2=1$, а СП $[x(t), x(t')]$ определяет функцию Грина. Заметим, что, выбирая гамильтониан «нулевого» приближения $H_0=0$, мы получим тот же результат (12).

Изложенный выше формализм позволяет также исследовать асимптотическое поведение специальных функций в окрестности любой точки области определения. С этой целью в качестве H_0 можно выбрать гамильтониан (11), содержащий несколько первых неисчезающих членов разложения функции $Q(t)$ в ряд Тейлора. Тогда остальные члены решения определяются формулой (6). Другая возможность может быть основана на использовании производящих функций, реализующих преобразование к новым переменным, в которых уравнение (8) имеет желаемую форму.

3. Усреднение гамильтоновых систем. Рассмотрим теперь систему, для которой ($n=1, \ldots, s$)

$$H=\frac{1}{2}p_np_n+\frac{1}{2}\omega_n^2x_nx_n+\varepsilon h(x, p, t).$$

Переходя к комплексным переменным a, a^+ с помощью замены

$$x=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(ae^{-i\omega t}+a^+e^{i\omega t}),\quad p=-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(ae^{-i\omega t}-a^+e^{i\omega t}),$$

заметим, что $z_{2k-1}=a_k(z_{2k}=ia^+_k)$ играют роль координат (импульсов) и удовлетворяют каноническим уравнениям с гамильтонианом $\varepsilon h'(z', t)=\varepsilon h(z(z', t), t)$. Следовательно, можно найти решение $a_k(t)$, полагая в (6) $A=a_k$, $R'=h'$. Поскольку функция $\varepsilon h'(z', t)$ может быть представлена в виде m-кратного ряда Фурье ($m=s$ для невырожденных систем), то решение (6) содержит секулярные члены, ухудшающие сходимость разложения. Суммируя подпоследовательности, содержащие секулярные слагаемые, можно получить перенормированное разложение, аналогичное разложению S-матрицы в терминах связанных диаграмм [14].

Однако наиболее просто исключение секулярных членов может быть достигнуто выбором подходящего канонического преобразования. В этом смысле наш подход является развитием идеи Боголюбова [1] о том, что в основе метода усреднения лежит замена переменных. Произведем замену $z=z(z', t)$, порождаемую уравнением

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial t}=[z_\mu, \varepsilon W(z, t; \varepsilon)].$$

Предполагается, что функция εW «включается» адиабатически [11], причем $z_\mu\to z'_\mu$ при $t=t_0$. В новых переменных гамильтониан системы $\varepsilon h'(z', t;\varepsilon)=\varepsilon H'(z(z', t; \varepsilon), t;\varepsilon)$, где $H'(z, t; \varepsilon)=h(z, t)-W(z, t; \varepsilon)$. Существенным преимуществом нашего подхода является то, что замена переменных $z\to z'$ в функциях z_μ, $\varepsilon H'(z, t; \varepsilon)$ осуществляется соотношениями (6) или (7), в которых следует положить $A=z_\mu$, $\varepsilon H'(z, t; \varepsilon)$, $R'=W$.

Для того чтобы преобразование $z\to z'$ реализовало переход к усредненным переменным z', функцию εW следует подчинить двум условиям: 1) среднее значение z_μ должно совпадать с z'_μ, 2) новый гамильтониан $\varepsilon h'(z', t; \varepsilon)$ не должен содержать членов, явно зависящих от времени. В явной форме эти условия имеют вид рекуррентных соотношений, из которых последовательно находим

$$\varepsilon W(z, t; \varepsilon)=\Sigma\varepsilon^nW_n(z', t),\ W_1=Vh, \ldots,$$

$$\varepsilon h'(z';\varepsilon)=M\left\{\varepsilon h+\frac{\varepsilon^2}{2}[W_1,\ \widetilde{W}_1]+\varepsilon^3\left[\left[\frac{1}{3}W_1+Mh,\ \widetilde{W}_1\right]\widetilde{W}_1\right]+\ldots\right\}, \tag{13}$$

$$z_\alpha=z'_\alpha+\varepsilon[z'_\alpha,\ \widetilde{W}_1]+\ \ldots\ . \tag{14}$$

Здесь символ M обозначает операцию усреднения [1], $Vh=h-Mh$, тильда — интегрирование по явному времени. Первые члены разложения (13) совпадают с найденными в работах [1, 17].

Заметим, что для квадратичных гамильтонианов $\varepsilon h(z,\ t)$ гамильтониан (13) усредненного движения является диагональной формой. В этом случае (13), (14) дают решение задачи на собственные значения и определяют собственные частоты и векторы исходной системы. Ниже мы покажем, что уравнения квантовомеханической теории возмущений можно представить в гамильтоновой форме с квадратичным гамильтонианом. В этом случае краевая задача Штурма—Лиувилля может быть решена методом усреднения.

4. Теория возмущений Рэлея—Шредингера в канонических переменных. Рассмотрим вариационную задачу для уравнения Шредингера. Представим энергию взаимодействия в виде $U=U_0(\mathbf{x})+\Pi(\mathbf{x},\ t)$ и предположим, что собственные функции $\Phi^{(0)}{}_n$ и значения $E^{(0)}{}_n$ невозмущенной задачи известны. Будем искать решение в виде

$$\psi(\mathbf{x},\ t)=\Sigma\, a_n(t)\,\Phi_n^{(0)}(\mathbf{x})\exp(-iE_n^{(0)}t). \tag{15}$$

Подставляя (15) в функционал, приводящий к уравнению Шредингера

$$S=\int\left[-\frac{i}{2}\psi^+\partial_t\psi+\frac{i}{2}\partial_t\psi^+\psi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\nabla\psi^+\nabla\psi+U(\mathbf{x},\ t)\,\psi^+\psi\right]d^3x\,dt,$$

найдем новый функционал

$$S=\int L\,dt,\quad L=\frac{i}{2}\,(\dot{a}_n^+a_n-a_n^+\dot{a}_n)+\varepsilon h(a,\ a^+,\ t),$$
$$\varepsilon h(a,\ a^+,\ t)=\Sigma\,\Pi_{n'n}(t)\,a_{n'}^+a_n\exp(i\,\omega_{n'n}t), \tag{16}$$

где $\Pi_{n'n}$ — матричный элемент оператора Π, $\omega_{n'n}=E_{n'}^{(0)}-E_n^{(0)}$. В терминах механики εh является энергией взаимодействия системы линейных осцилляторов. Нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа—Эйлера по переменным a, a^+ принимают вид уравнений Гамильтона (1), где $z_{2k-1}=a_k$, $z_{2k}=ia^+{}_k$, $H=\varepsilon h$. Следовательно, полагая в (6) $A=a_k$, получим известное [4] в нестационарной теории возмущений разложение. Более того, (6) определяет зависимость от времени матричных элементов произвольного оператора $\hat{F}$. Для этого в (6) следует положить

$$A=\int\psi^+\hat{F}\,\psi\,d^3x=\sum F_{n'n}a_{n'}^+a_n\exp(i\omega_{n'n}t).$$

Соотношение (6) позволяет также вычислить квадраты матричных элементов, а в общем случае — произвольную функцию матричных элементов.

Обсудим теперь решение задачи в усредненных переменных. Если подставить в (13) гамильтониан (16), то усредненный гамильтониан в новых переменных $z'_{2k-1}=a'_k$ диагонален: $\varepsilon h'(z')=\Delta E_n a'^+{}_n a'_n$, где

$\Delta E_n(\varepsilon)$ (сдвиг уровня n-го состояния) определяет поправки к собственным значениям $E^{(0)}{}_n$. После элементарного интегрирования усредненной системы $\dot{z}'=[z', \varepsilon h']$ формула (15) определяет собственные функции. Очевидно, каноническое преобразование к усредненным переменным представляет, по существу, эффективный метод решения систем однородных алгебраических уравнений n-го порядка.

Автор выражает благодарность А. А. Соколову за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. [2] Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. [3] Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. [4] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М.: Наука, 1979. [5] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. [6] Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1970, т. 2; 1971, т. 3. [7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. [8] Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. [9] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, с. 137. [10] Павленко Ю. Г. Теор. и матем. физ., 1981, **49**, № 1, с. 92. [11] Боголюбов Н. Н., Широков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976. [12] Степанов В. В, Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат. [13] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. [14] Вопросы квантовой теории многих тел. Под ред. В. Л. Бонч-Бруевича. М.: ИЛ, 1959. [15] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962, с. 127. [16] Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: ОГИЗ, 1947, с. 52. [17] Бурштейн Э. Л., Соловьев Л. С. ДАН СССР, 1961, **139**, № 1, с. 355.

Поступила в редакцию
01.07.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.172.1

К ВОПРОСУ ОБ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ЧАСТИЦ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ РАСЩЕПЛЕНИИ ЯДЕР АДРОНАМИ

Е. Ф. Кисляков

(НИИЯФ)

В последнее время корреляционные эксперименты ставятся для изучения не только процессов прямого квазиупругого выбивания, но и структуры непрерывного спектра ядер [1]. Однако все эксперименты такого типа были выполнены лишь в копланарной кинематике, когда выбитая частица детектируется только в плоскости реакции, т. е. в одной плоскости с импульсами падающей $\mathbf{k}$ и рассеянной $\mathbf{k}'$ частиц. Для извлечения из этих экспериментов информации о соотношении вероятностей распада гигантских резонансов по различным каналам производится интегрирование измеряемой функции угловой корреляции по направлениям импульса выбитой частицы. При этом предполагается (см., например, [2]), что угловое распределение выбитых частиц имеет азимутальную симметрию относительно направления переданного ядру импульса $\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}'$. Между тем теоретический анализ показывает, что при расщеплении ядра сильновзаимодействующими частицами эта симметрия заметно нарушается [3]. Очевидно, что, ограничиваясь копла-