УДК 530.12:531.51

О СООТВЕТСТВИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ В ТЕОРИИ ПРЯМОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. Ю. Турыгин
(кафедра теоретической физики)

В работах Уилера и Фейнмана [1] по теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия (ТПМЭВ) показано, что возможна согласующаяся с опытом, по крайней мере на классическом уровне, формулировка теории электромагнетизма, основанная на принципе действия Фоккера, не учитывающем явно понятие поля.

Представляет интерес поставить аналогичную задачу для гравитационного взаимодействия. В этом направлении имеется ряд работ (см., например, [2—4]), в которых, однако, либо теория строится на отличных от ТПМЭВ принципах [2], либо изучаются только первые порядки [3, 4].

В данной работе для произвольного заданного фона $g_{\alpha\beta}$ построено действие фоккеровского типа в произвольном порядке по константе гравитационного взаимодействия k для пробной частицы, взаимодействующей с некоторой системой, характеризуемой заданным тензором энергии-импульса (ТЭИ) $T^{\mu\nu}$. Доказано, что уравнениями движения пробной частицы, следующими из этого принципа, являются уравнения геодезической линии в некоторой эффективной метрике, зависящей от переменных системы. Результат этот вполне аналогичен ситуации в ТПМЭВ, где в симметричном во времени случае уравнениями движения пробного заряда являются обычные по виду уравнения с одной лишь силой Лоренца в правой части уравнения. Эффекты излучения же возникают при использовании теории поглотителя [1].

Отметим существенное отличие постулированного в данной работе принципа действия для теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия (ТПМГВ) от принципа действия ТПМЭВ. В ТПМЭВ в силу линейности теории определялись только двухчастичные взаимодействия. Вследствие нелинейности гравитационных взаимодействий прямое перенесение рецепта построения ТПМЭВ на случай ТПМГВ не приводит к нужным результатам в высших порядках. Оказалось достаточным перед действием, описывающим взаимодействия порядка k^n ($n+1$-частичные взаимодействия), поставить коэффициент $1/n$.

Пусть разложение $T^{\mu\nu}$ по k имеет вид $T^{\mu\nu} = \sum_{i=0} k^i \overset{i}{T}{}^{\mu\nu}$. Введем обозначение

$$\overset{i}{h}_{\mu\nu} = 4\pi\eta_i \int \bar{G}_{\mu\nu\alpha\beta} \overset{i}{T}{}^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d^4x', \text{ где } \bar{G}_{\mu\nu\alpha\beta}(x, x') \text{ —}$$

битензорная функция Грина некоторого волнового уравнения [5], вид которого определяется метрикой фона, η_i — произвольные числа.

Тогда действие в n-м порядке по k, описывающее взаимодействие пробной частицы с указанной системой, постулируется в виде

$$\overset{n}{S} = \sum_{m=0}^{n} \theta_m k^m \int W_m(x)\, d^4x, \quad W_m = \sum_{i=0}^{m-1} \theta_i W_{im-1-i} \quad (m \geqslant 1), \tag{1}$$

$$W_{ij} = \overset{i}{t}{}^{\mu\nu} \overset{j}{h}_{\mu\nu}, \quad \overset{i}{t}{}^{\alpha\beta} = -2 \frac{\delta W_i}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad (i \geqslant 0), \tag{2}$$

где $\overset{0}{S} \equiv \int W_0(x)\, d^4 x$ — свободное действие, $\theta_m = \{1,\ m=0;\ 1/m,\ m \neq 0\}$. Из (1) находим плотность ТЭИ пробной частицы с взаимодействием

$$\overset{n}{\tau}{}^{\alpha\beta} = \sum_{m=0}^{n} \theta_m k^m \overset{m}{t}{}^{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Доказательство высказанного во введении утверждения проведем методом индукции. Сначала проверим его в первых трех порядках, затем, предположив справедливость этого утверждения в n-м порядке, докажем, что в $(n+1)$-м оно также выполняется.

В первом порядке этот результат известен [6]. Во втором и третьем порядках, пользуясь формулами (1), (2), непосредственным вычислением можно получить, что с точностью до k^n

$$\overset{n}{S} = -m_0 \int d\overset{n}{s}, \quad \overset{n}{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i k^i \overset{i}{\sigma}_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

$$\overset{m}{\sigma}_{\alpha\beta}(z) = 2 \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i \theta_m \int \frac{\delta \overset{i}{\sigma}_{\alpha\beta}(z)}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \overset{m-1-i}{h}_{\mu\nu}(x)\, d^4 x, \tag{5}$$

где $0 \leqslant n \leqslant 3$, $1 \leqslant m \leqslant 3$, $\varepsilon_m = \{+1,\ m=0;\ -1,\ m \neq 0\}$; $\overset{0}{\sigma}_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}$, m_0 — масса пробной частицы и полагается $\overset{n}{z}{}^\alpha = z^\alpha$, $d\overset{n}{z}{}^\alpha = dz^\alpha$ [7].

Пусть теперь оно справедливо до n-го порядка включительно и эффективный метрический тензор имеет вид (4). Докажем сначала, что формула (5) верна в этом случае для $1 \leqslant m \leqslant n$. Доказательство также проведем по индукции. Для $1 \leqslant m \leqslant 3$ это было уже доказано. Пусть она верна для $1 \leqslant m \leqslant n-1$, т. е. $(u^\alpha = dz^\alpha/ds)$

$$\overset{n-1}{S} = -m_0 \int d\overset{n-1}{s} = -m_0 \int (\psi(k))^{\frac{1}{2}} ds, \quad \psi(k) = 1 - \sum_{m=1}^{n-1} k^m \overset{m}{\sigma}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \tag{6}$$

причем $\overset{m}{\sigma}_{\alpha\beta}$ для $1 \leqslant m \leqslant n-1$ определяются формулой (5). Далее, варьируя (6) по $g_{\alpha\beta}$, найдем $\overset{n-1}{\tau}{}^{\alpha\beta}$ (см. (3)) и разложим ее в ряд по k, используя формулу (4) и формальный ряд Тейлора по k с точностью до k^{n-1} для функции

$$(\psi(k))^{-\frac{1}{2}} \equiv \chi(k) \simeq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} k^j \chi^{(j)}(0).$$

Затем, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k в полученной таким образом формуле и формуле (3), находим для $0 \leqslant r \leqslant n-1$:

$$\overset{r}{t}{}^{\mu\nu} = m_0 \theta_r^{-1} \sum_{i=0}^{r} \varepsilon_i \frac{1}{(r-i)!} \int u^\alpha u^\beta \frac{\delta \overset{i}{\sigma}_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \chi^{(r-i)}(0)\, ds. \tag{7}$$

Используя (7), по общей формуле (1) имеем

$$\overset{n}{S} = \overset{n-1}{S} + m_0 \theta_n k^n \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{p} \varepsilon_i \frac{1}{(p-i)!} \iint u^\alpha u^\beta \frac{\delta \overset{i}{\sigma}_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \chi^{(p-i)}(0) \overset{n-1-p}{h}_{\mu\nu} d^4 x\, ds. \tag{8}$$

В (8) введем новые индексы суммирования, сначала $p=s$, $i=s-j$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $j \leqslant s \leqslant n-1$, затем $j=j$, $s-j=r$, $0 \leqslant r \leqslant n-1-j$. Далее выделим слагаемое с $j=0$ и учтем, что формула (5) по предположению верна до $(n-1)$-го порядка и что $\chi(0)=1$. Тогда получим

$$\overset{n}{S} = \overset{n-1}{S} + m_0 \theta_n k^n \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!} \theta_{n-j}^{-1} \int u^\alpha u^\beta \overset{n-j}{\sigma}_{\alpha\beta} \chi^{(j)}(0)\, ds +$$

$$+ m_0 \theta_n k^n \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_r \iint u^\alpha u^\beta \frac{\delta \overset{r}{\sigma}_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \overset{n-1-r}{h}_{\mu\nu} d^4 x\, ds. \tag{9}$$

Обозначим $(\psi(k))^{\frac{1}{2}} \equiv \gamma(k) \simeq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} k^i \gamma^{(i)}(0)$. Заметим, что

$$\gamma'(k) = \frac{1}{2} \chi(k) \psi'(k).$$

Применяя формулу Лейбница для $(n-1)$-й производной произведения двух функций и учитывая, что из (6) следует $\psi^{(j)}(0) = -j! \overset{j}{\sigma}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$, $\psi^{(n)}(0)=0$, найдем n-й член разложения $\overset{n-1}{S}$ по k. Произведя в полученной формуле очевидную замену индекса суммирования, убедимся, что она совпадает со вторым слагаемым в (9). Поэтому из (9) с учетом этого факта с точностью до k^n получаем (4), причем $\overset{n}{\sigma}_{\alpha\beta}$ определяется формулой (5) для $m=n$. Следовательно, по индукции, формула (5) верна для $1 \leqslant m \leqslant n$.

Докажем теперь, что в $(n+1)$-м порядке также будет геодезическая. Проделывая аналогичные вычисления, в которых в (6) нужно вместо $n-1$ подставить n, а функции $\chi(k)$ и $\gamma(k)$ разложить в ряд Тейлора с учетом n-го и $(n+1)$-го членов соответственно, получим $\overset{n+1}{S}$ и $(n+1)$-й член разложения $\overset{n}{S}$ по k. Затем, вводя аналогичное (5) обозначение для $m=n+1$, таким же образом получим, что с точностью до k^{n+1} имеет место равенство (4) для $n \to n+1$, т. е. доказываемое утверждение верно в порядке $n+1$. Следовательно, по индукции, оно верно в любом порядке.

В заключение заметим, что требование геодезичности не фиксирует однозначно (1)—(2). Если расписать $\overset{m}{\sigma}_{\alpha\beta}$ через вариационные производные от $\overset{i}{h}_{\mu\nu}$, то перед каждым членом полученного выражения допускаются произвольные коэффициенты. Их определение (как и η_i) связано с решением вопроса о соответствии (1)—(2) ОТО или другой теории гравитации. Однако принципиальна сама возможность действия в рамках ТПМГВ, из которого следовала бы геодезичность в любом порядке.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Владимирову за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Wheeler J. A., Feynman R. P. Rev. Mod. Phys., 1945, 17, p. 157; Ibid., 1949, 21, p. 425. [2] Hoyle F., Narlikar J. V. Action a distance in physics and cosmology. San-Francisco, 1974. [3] Жданов В. И., Пирагас К. А. Acta Phys. Polon., 1972, B3, p. 585. [4] Пантюшин А. А. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1969, вып. 6, с. 30. [5] DeWitt B. S., Brehme R. W. Ann. Phys., 1960, 9, p. 220. [6] Турыгин А. Ю. Изв. вузов. Сер. Физика, 1981, № 6, с. 82. [7] Rosen N. Phys. Rev., 1940, 57, p. 147.

Поступила в редакцию
30.07.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ КАПЛИ

В. П. Гончаров, В. А. Красильников, В. И. Павлов

(кафедра акустики)

Целью работы является исследование нелинейных волновых движений замкнутой поверхности несжимаемой жидкости, находящейся под действием сил поверхностного натяжения. Эта задача интересна по крайней мере в двух отношениях: она важна в целом ряде чисто акустических проблем и, кроме того, может играть определенную роль при исследовании ангармонических эффектов атомных ядер в рамках гидродинамического описания [1]. В такой ситуации, когда различные физические явления описываются одинаковой моделью, разумно использовать гамильтонов подход [2].

Однако указанный подход предполагает, что известны пары $\{q, \varphi\}$ так называемых канонически сопряженных переменных, связанных с «естественными» переменными (такими как скорость, плотность и т. п.), с использованием которых уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\dot{q}_i = \frac{\delta \mathscr{H}}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\varphi}_i = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где гамильтониан $\mathscr{H}$ — функционал, связанный с полной энергией среды.

Учитывая, что определение таких переменных является наиболее трудным моментом и по трудности выходит далеко за пределы данной задачи, кратко остановимся на схеме, согласно которой в рамки метода можно включить среды гидродинамического типа со свободными границами в евклидовом пространстве с произвольной метрикой. Канонические переменные $\{q, \varphi\}$, $\{p, \mu\}$ вводятся соотношением

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi - \frac{p}{q} \nabla \mu,$$

$$q = \varepsilon \sqrt{g}\ \rho, \quad p = \varepsilon \lambda.$$