Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Владимирову за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Wheeler J. A., Feynman R. P. Rev. Mod. Phys., 1945, 17, p. 157; Ibid., 1949, 21, p. 425. [2] Hoyle F., Narlikar J. V. Action a distance in physics and cosmology. San-Francisco, 1974. [3] Жданов В. И., Пирагас К. А. Acta Phys. Polon., 1972, B3, p. 585. [4] Пантюшин А. А. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1969, вып. 6, с. 30. [5] DeWitt B. S., Brehme R. W. Ann. Phys., 1960, 9, p. 220. [6] Турыгин А. Ю. Изв. вузов. Сер. Физика, 1981, № 6, с. 82. [7] Rosen N. Phys. Rev., 1940, 57, p. 147.

Поступила в редакцию
30.07.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 2

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ КАПЛИ

В. П. Гончаров, В. А. Красильников, В. И. Павлов
(кафедра акустики)

Целью работы является исследование нелинейных волновых движений замкнутой поверхности несжимаемой жидкости, находящейся под действием сил поверхностного натяжения. Эта задача интересна по крайней мере в двух отношениях: она важна в целом ряде чисто акустических проблем и, кроме того, может играть определенную роль при исследовании ангармонических эффектов атомных ядер в рамках гидродинамического описания [1]. В такой ситуации, когда различные физические явления описываются одинаковой моделью, разумно использовать гамильтонов подход [2].

Однако указанный подход предполагает, что известны пары $\{q, \varphi\}$ так называемых канонически сопряженных переменных, связанных с «естественными» переменными (такими как скорость, плотность и т. п.), с использованием которых уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\dot{q}_i = \frac{\delta \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\varphi}_i = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ — функционал, связанный с полной энергией среды.

Учитывая, что определение таких переменных является наиболее трудным моментом и по трудности выходит далеко за пределы данной задачи, кратко остановимся на схеме, согласно которой в рамки метода можно включить среды гидродинамического типа со свободными границами в евклидовом пространстве с произвольной метрикой. Канонические переменные $\{q, \varphi\}$, $\{p, \mu\}$ вводятся соотношением

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi - \frac{p}{q} \nabla \mu,$$

$$q = \varepsilon \sqrt{g}\, \rho, \quad p = \varepsilon \lambda.$$

Здесь $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость среды, ρ — ее плотность, g — определитель метрического тензора, $\varepsilon(t)$ — функция Хевисайда: $\varepsilon(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{|t|}\right)$. В случае безграничной среды всюду $\varepsilon=1$ и (2) представляет собой образец, по которому гамильтоновский формализм вводился для небаротропных сред [3, 4] в случае $g=1$.

Легко получить как частный случай и канонические переменные для колебаний плоской поверхности однородной жидкости, найденный в [5]. Действительно, поскольку в этом случае $p=0$, $\mu=0$, канонически сопряженной парой будет $\{\varphi, \varepsilon(\eta-z)\}$. С помощью канонического преобразования

$$\psi=\frac{\delta}{\delta\varepsilon(\eta-z)}\int dz'\,d\mathbf{x}'\,\varphi\varepsilon(\eta-z'),\quad \eta=\frac{\delta}{\delta\varphi}\int dz'\,d\mathbf{x}'\,\varphi\varepsilon(\eta-z')$$

можно перейти к новым переменным $\{\psi, \eta\}$.

Канонические переменные для волновых движений несжимаемой неоднородной жидкости, когда $g=1$, находятся аналогично. Формально следует положить $\lambda=1$. Вместо μ и $\varepsilon(\eta-z)$ удобно перейти к переменным η и $\mu|_{z=\eta}$, которые совместно с условием несжимаемости $\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}}=0$ позволят исключить величину μ [6].

Возвращаясь к задаче данной работы, выпишем для аксиально-симметричного движения поверхности несжимаемой жидкости гамильтониан в сферической системе координат:

$$\mathscr{H}=\pi\rho_0\int_0^\pi d\theta\sin\theta\left\{r^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha}{\rho}\left[r^2\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right)^2}-r_0^2\right]+\frac{2}{3}\beta r^3\right\}\Bigg|_{r=r_0+\eta},$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, а $g=r^4\sin^2\theta$. Согласно схеме (1) каноническими переменными в сферической системе координат будут $\{\varphi, \varepsilon(r-(r_0+\eta))r^2\sin\theta\}$. Перейдем к новым переменным

$$\sigma=\sin\theta\int_0^\infty dr\cdot\varphi\,\delta(r-r_0-\eta),$$

$$\xi=\frac{1}{r_0^3}\int_{r_0}^\infty dr\cdot r^2\varepsilon(r_0+\eta-r),$$

которые позволяют записать квадратичную часть гамильтониана в матричном виде:

$$\mathscr{H}_0=\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\Psi^+\widehat{\mathscr{H}}_0\Psi.$$

Решив задачу $(\mathscr{H}_0+\omega_n\widehat{A})\Psi_n=0$, где $\widehat{A}=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, и определив тем самым собственные значения

$$\omega_n=\left[\frac{\alpha}{\rho r_0^3}(l-1)\,l\,(l+2)\right]^{1/2}$$

и собственные функции

$$\Psi_l^+ = \left(\sqrt{\frac{\omega_l r_0^2}{l}} \sin\theta,\ -i\sqrt{\frac{l}{\omega_l r_0^2}}\right)\frac{(2l+1)^{1/2}}{2} P_l(\cos\theta)$$

с помощью преобразования $\Psi = \sum_l c_l \Psi_l$, можно перейти к нормальным переменным c_l, для которых $\mathscr{H}_l$ и уравнения движения (1) примут вид

$$\mathscr{H}_0 = \sum_l \omega_l |c_l|^2,\ \dot{c}_l = -i\,\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta c_l^*}.$$

Рассмотрим эволюцию низшей моды $n=2$ в результате ее взаимодействия со случайными флуктуирующими остальными модами. При этом, если принять во внимание запрет на взаимодействие с участием низшей моды, необходимо учесть два фактора — конечность времени жизни низшей моды и четырехволновые процессы, которые в данной работе не рассматриваются. Трехволновые процессы описываются уравнением

$$\dot{a}_n = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\alpha}{\rho r_0^3}\right)^{1/4} \sum_{m,l} \begin{pmatrix} & n & \\ m, & & l \end{pmatrix} a_m a_l \exp\left[-i(\omega_m + \omega_l - \omega_n)t\right],$$

где $\begin{pmatrix} & n & \\ m, & & l \end{pmatrix}$ — числовые коэффициенты взаимодействия, симметричные по нижним индексам, а $a_n = c_n \exp i\omega_n t$. Представим a_n в виде (см. [7]) $a_n = \bar{a}_2\delta_{n,2} + s_n + b_n$, где $\bar{a}_2$ — средняя амплитуда рассматриваемой моды, b_n — флуктуационное слагаемое n-й моды, обусловленное ее взаимодействием с шумом, s_n — заданная амплитуда шумового поля. Опуская промежуточные выкладки [7, 8], получаем для декремента затухания низшей моды следующее выражение:

$$\Gamma_2 = \frac{4}{r_0^2}\left(\frac{\alpha}{\rho r_0^3}\right)^{1/2} \sum_{m,n} \begin{pmatrix} & 2 & \\ m, & & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & n & \\ 2, & & -m \end{pmatrix} N_m \frac{\sin\Delta\omega\tau}{\Delta\omega},$$

где

$$N_m = \langle s_m s_m^* \rangle,\ m \neq 2,\ \Delta\omega = \omega_m + \omega_n - \omega_2.$$

Приведенное выражение позволяет получить детальную информацию о процессе затухания низшей возбужденной моды за счет нелинейных эффектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ходель В. А. Ядерная физика, 1976, 24, № 4, с. 704. [2] Захаров В. Е. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 431. [3] Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1976, 12, № 11, с. 1143. [4] Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. ДАН СССР, 1976, 228, № 2, с. 332. [5] Захаров В. Е. Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1968, № 2, с. 86. [6] Гончаров В. П. Канд. дис. М., 1977. [7] Наугольных К. А., Рыбак С. А. Акуст. журн., 1976, 22, № 4, с. 735. [8] Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. В кн.: IX Всес. акуст. конф., Б1—3. М., 1977, с. 15.

Поступила в редакцию
20.08.81