УДК 530.145.6

ЭКВИДИСТАНТНЫЙ СПЕКТР В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

В. Б. Гостев, В. С. Минеев, А. Р. Френкин

(кафедра квантовой теории)

В связи с построением уровней энергии и волновых функций кваркониумных состояний [1] в последнее время уделяется большое внимание задаче о построении нерелятивистского удерживающего (растущего на бесконечности) потенциала по заданным уровням энергии [2]. Эта задача может быть решена методом, близким к решению аналогичной задачи для быстро убывающего потенциала, — с помощью интегрального уравнения Гельфанда—Левитана (ГЛ) [3]. Основным отличием от обратной задачи рассеяния в случае удерживающего потенциала является необходимость использования точных собственных волновых функций и уровней энергии уравнения Шредингера (УШ) с выбранным заранее опорным потенциалом. В работе [4] в качестве опорного потенциала использовался

$$V(x)=x^2,\ -\infty<x<\infty.$$

Мы рассмотрим более реалистическую модель ($\hbar=m=1$):

$$V(r)=r^2+\frac{A}{r^2},\ 0\leqslant r<\infty,\ A>-\frac{1}{4}; \tag{1}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\psi\left[2E-\frac{l(l+1)}{r^2}-V(r)\right]=0.$$

Решение УШ с таким потенциалом [5] приводит к эквидистантным уровням энергии при фиксированном орбитальном моменте $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$:

$$E_{ln}=s_l+2n+3/2,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2}$$

$$s_l=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2l+1)^2+4A}-1\right) \tag{3}$$

и регулярным ($\varphi_{ln}(r)\simeq r^{s_l+1},\ r\to 0$) волновым функциям

$$\varphi_{ln}(r)=r^{s_l+1}e^{-\frac{r^2}{2}}F\left(-n,\ s_l+\frac{3}{2},r^2\right), \tag{4}$$

где $F(a,\ b,\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [5, с. 745] (в нашем случае — полином степени n [6]). Нормировочные постоянные для функций (4)

$$C_{ln}=\left(\int_0^\infty \varphi_{ln}^2(r)\,dr\right)^{-1}=\frac{2\Gamma\left(n+s_l+\frac{3}{2}\right)}{n!\,\Gamma^2\left(s_l+\frac{3}{2}\right)}. \tag{5}$$

Новый потенциал $\widetilde{V}(r)$ и новые волновые функции $\widetilde{\varphi}_{ln}(r)$ находятся из единственного решения уравнения ГЛ

$$K(r,r')=g(r,r')-\int_0^r dr''K(r,r'')g(r'',r'). \tag{6}$$

где

$$g(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\tilde{\rho}(E) - \rho(E))}{dE} \varphi_l(E, r) \varphi_l(E, r')\, dE, \tag{7}$$

$$\frac{d\rho(E)}{dE} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{ln} \delta(E - E_n), \tag{8}$$

по формулам [3] (вывод (6) аналогичен выводу в [3, 4]):

$$\Delta V(r) = \tilde{V}(r) - V(r), \tag{9}$$

$$\Delta V(r) = -2 \frac{dK(r, r)}{dr}, \tag{10}$$

$$\tilde{\varphi}_l(E, r) = \varphi_l(E, r) - \int_0^{\infty} K(r, r') \varphi_l(E, r')\, dr'. \tag{11}$$

Вид новой спектральной функции $\tilde{\rho}(E)$ аналогичен (8) и ограничен только сходимостью ядра (7) и фредгольмовским характером уравнения (6). Когда $\frac{d(\tilde{\rho}(E) - \rho(E))}{dE}$ — конечная сумма, уравнение (6) становится вырожденным и его решение представимо в замкнутой форме [7] $-K(r, r') = \sum_{n=1}^{N} \varphi_l(E_n, r) \psi_l(E_n, r)$. Особенно простой вид имеет это решение, когда $g(r, r')$ содержит лишь одно произведение $\varphi_l(E, r)\varphi_l(E, r')$. Разберем только эти случаи (общий случай ($N>1$) не меняет асимптотического вида волновых функций и поправки к потенциалу (9)).

1. Изменение m-й нормировочной постоянной.

$$g(r, r') = \Delta C_{lm} \varphi_{lm}(r) \varphi_{lm}(r'). \tag{12}$$

При фиксировании всех уровней (2) и изменении одной нормировочной постоянной (5) $\Delta C_{lm} = \tilde{C}_{lm} - C_{lm} > -C_{lm}$, $\Delta C_{ln} = 0$, $n \neq m$, поправка к потенциалу выражается через элементарные функции и функцию ошибок, общее выражение ее достаточно громоздко, а при $r \to 0$

$$\Delta V(r) = -4\Delta C_{lm}(l+1) r^{2l+1}, \tag{13}$$

при $r \to \infty$

$$\Delta V(r) = \frac{8\Delta C_{lm} r^{2E_{lm}} e^{-r^2}}{n!\, \tilde{C}_{lm}\, \Gamma\left(l + n + \frac{3}{2}\right)}. \tag{14}$$

Новые собственные функции $\tilde{\varphi}_{ln}(r)$ регулярны в нуле (4) и ведут себя как осцилляторные ($\sim e^{-r^2/2} r^{E_{ln} - 1/2}$) при $r \to \infty$. Потенциалы (12), (13) образуют однопараметрическое (параметр ΔC_{lm}), а в общем случае N-параметрическое семейство потенциалов с тем же спектром (2) при фиксированном l, что и осциллятор (1). Таким образом, вопреки утверждению работы [8], существует класс аналитических потенциалов, приводящих к эквидистантным уровням в центральном поле. При $l=0$ эти же потенциалы дают класс одномерных потенциалов ($-\infty < x < \infty$)

$$V(x) = \begin{cases} +\infty; \ x < 0, \\ x^2 + \frac{A}{x^2} + \Delta V(x), \ x > 0, \ A > -\frac{1}{4} \end{cases} \tag{15}$$

с эквидистантным спектром. Согласно [8] классический непрерывный потенциал (15) с $A>0$ является изохронным — период финитного движения в нем не зависит от энергии.

2. Выключение одного из уровней (m-го). В формуле (12) $\Delta C_{lm}=-C_{lm}$, т. е. $\widetilde{C}_{lm}=0$. Поведение $\Delta V(r)$ при $r\to 0$ дается по-прежнему (13), но формула (14) (при $r\to\infty$) видоизменяется:

$$\Delta V \simeq 4 \tag{16}$$

и приводит к существенной перестройке потенциала за счет перестройки спектра.

3. Включение добавочного уровня с энергией $\widetilde{E}_l(\widetilde{E}_l>0,\ \widetilde{E}_l\neq E_{ln})$ —

$$g(r, r')=\widetilde{C}_l\varphi_l(\widetilde{E}_l, r)\varphi_l(\widetilde{E}_l, r'),\ \widetilde{C}_l>0, \tag{17}$$

является дополнительной в некотором смысле операцией по отношению к п. 2. Поведение поправки к потенциалу при $r\to 0$ по-прежнему описывается формулой (13) ($\Delta C_{lm}\to\widetilde{C}_l$), а при $r\to\infty$ получаем

$$\Delta V \simeq -4. \tag{18}$$

Новые волновые функции в случаях 2 и 3 регулярны при $r\to 0$ ($\sim r_l^{s_l+1}$) и асимптотически ($r\to\infty$) близки к осцилляторным (4). Использованные в (17) регулярные решения УШ, не принадлежащие спектру, имеют вид [5, 9]

$$\varphi_l(E, r)=r^{s_l+1}e^{-\frac{r^2}{2}}F\left(\frac{2s_l+3-2E}{4};\ s_l+\frac{3}{2};\ r^2\right), \tag{19}$$

асимптотически ($r\to\infty$) они экспоненциально растут ($\sim e^{r^2/2}$). Поправка к потенциалу и волновым функциям выражается через неполную Г-функцию $\Gamma(a, z)$ и $F(a, b, z)$ и аналитична по r^2. Поскольку во всех трех случаях $\Delta V/V\to 0$ ($r\to\infty$), то, как и следовало ожидать, чисто дискретный спектр сохраняется при всех перестройках потенциала (13), (14), (16), (18) [10].

Комбинации случаев 1, 2, 3 могут быть рассмотрены методом ГЛ, однако основные результаты пунктов 1, 2, 3 при этом не меняются. Найденные нами поправки к потенциалу и волновым функциям сильнее всего проявляются для потенциала в случае s-волны ($l=0$) при $r\to 0$, когда

$$\widetilde{V}(r)\simeq -4\,\Delta C_{ln}r \tag{20}$$

и для волновых функций — при вычислении радиальных матричных элементов, которые берутся по нормированным волновым функциям и могут значительно отличаться от первоначальных матричных элементов за счет измененных нормировочных постоянных

$$R_{l'n'ln}=(\widetilde{C}_{l'n'}, \widetilde{C}_{ln})^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \widetilde{\varphi}_{l'n'}(r)\widetilde{\varphi}_{ln}(r)f(r)\,dr. \tag{21}$$

В заключение отметим, что метод спектральной обратной задачи, примененный к нахождению «эквидистантных» потенциалов $\widetilde{V}(r)$, дополняет метод работы [8]. Мы по опорному потенциалу (1) находим класс спектрально-эквивалентных потенциалов, а в [8] сам опорный потенциал был получен по спектру (2) из функционального уравнения. Обобщение на случай одномерного движения ($-\infty<x<\infty$), частично