УДК 62—50; 534

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКОЙ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

В работе изучены типы траекторий корней большого многообразия линейных и линеаризованных систем (механических, электромеханических и др.) с обратной связью или без нее, описываемых характеристическим уравнением

$$(a_0p^4+a_1p^3+a_2p^2+a_3p+a_4)+K(b_0p+b_1)=0. \qquad (1)$$

Здесь K — линейный свободный параметр, изменяющийся в широких пределах ($0\leqslant K<+\infty$ или $-\infty<K\leqslant 0$), a_i ($i=0, ..., 4$) и b_j ($j=0, 1$) — параметры семейства траекторий корней, являющиеся функциями параметров системы и однозначно определяющие тип корневого годографа (по его основным точкам).

С помощью преобразований на комплексной плоскости p (переноса мнимой оси, выбора начальных точек и изменения масштаба), не меняющих типа траекторий корней, семейство корневых годографов уравнения (1), зависящее от семи параметров a_i и b_j, может быть изучено в зависимости от двух параметров M_n и N_n, являющихся функциями a_i и b_j. Это позволяет на плоскостях (M_n, N_n) выделить области с разными типами траекторий корней и проследить за изменением типа траекторий корней при изменении любых параметров системы, входящих в коэффициенты a_i и b_j.

Соотношения между параметрами M_n и N_n, определяющие тип корневого годографа, могут быть получены из анализа уравнения возможных кратных точек [1], а также симметрии или асимметрии корневых годографов относительно вертикальной прямой, проведенной через центр асимптот.

Знание типов траекторий корней уравнения (1) позволяет облегчить поиск оптимальных значений параметров систем класса [4; 1] при их проектировании.

Производя в уравнении (1) замену $p=p_1-a_1/4a_0$, получим

$$(p^4{}_1+Rp^2{}_1+Qp_1+N)+K_0(p_1+M_1)=0, \qquad (2)$$

где

$$R=\frac{a_2}{a_0}-\frac{3}{8}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2,$$

$$N=\frac{a_4}{a_0}-\frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_3}{a_0}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\left(\frac{a_2}{a_0}\right)-\frac{3}{256}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^4, \qquad (3)$$

$$Q=\frac{a_3}{a_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_2}{a_0}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3,\ M_1=\frac{b_1}{b_0}-\frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0}\right),\ K_0=\frac{b_0}{a_0}K.$$

Избавимся от члена Qp_1 в уравнении (2). Принимая за начальные точки корни уравнения (2) при значении свободного параметра $K_0=-Q$, приходим к уравнению

$$(p^4{}_1+Rp^2{}_1+N_1)+K_1(p_1+M_1)=0, \qquad (4)$$

где

$$N_1 = N - QM_1, \quad K_1 = K_0 + Q. \tag{5}$$

В зависимости от величины $R = \frac{a_2}{a_0} - \frac{3}{8}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \gtreqless 0$ рассмотрим возможные три случая.

Если $R=0$, то уравнение (4) принимает вид

$$(p^4{}_1 + N_1) + K_1(p_1 + M_1) = 0, \tag{6}$$

зависящий от двух параметров семейства траекторий корней M_1 и N_1.

Если $R \neq 0$, то с помощью замены $p_1 = \sqrt{|R|}\, p_2$ получаем уравнение

$$(p^4{}_2 \pm p^2{}_2 + N_2) + K_2(p_2 + M_2) = 0, \tag{7}$$

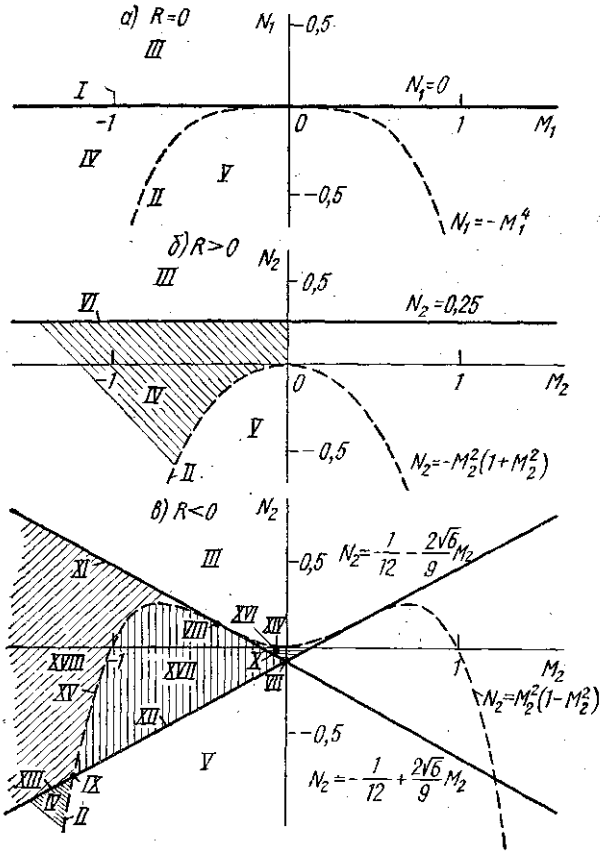
зависящее также от двух параметров семейства траекторий корней M_2 и N_2, где

$$M_2 = M_1/|R|^{1/2}, \quad N_2 = N_1/R^2, \quad K_2 = K_1/|R|^{3/2}, \tag{8}$$

а знак перед $p^2{}_2$ определяется знаком величины R.

Объединяя вместе уравнения (6) и (7), окончательно получим

$$(p^4{}_n + Cp^2{}_n + N_n) + K_n(p_n + M_n) = 0. \tag{9}$$



Здесь при $R=0$ $n=1$ и $C=0$, $R \lesseqgtr 0$ $n=2$ и $C=\pm 1$, а параметры M_n, N_n, K_n выражаются через параметры a_i, b_j, K уравнения (1) согласно (3), (5), (8).

Выделим на плоскостях параметров (M_n, N_n) области с разными типами корневых годографов (рисунок). Начальные точки уравнения (9) при любом значении N_n располагаются симметрично, а предельная точка при $M_n \neq 0$ — асимметрично относительно мнимой оси комплексной плоскости p_n. Следовательно, при замене предельной точки на зеркально-симметричную траектории корней также получаются зеркально-симметричными относительно мнимой оси комплексной плоскости p_n, причем четные траектории корней становятся нечетными и наоборот. Назовем типы траекторий корней уравнения

(9) для значений параметров M_n и N_n, лежащих в левой полуплоскости (M_n, N_n), основными, а для значений M_n и N_n, лежащих в правой полуплоскости, зеркальными. В частном случае $M_n=0$ ($-\infty<M_n<+\infty$) траектории корней будут симметричными относительно вертикальной прямой, проведенной через центр асимптот. Знание основных типов годографов позволяет выявить зеркальные по отношению к ним, что сокращает объем вычислений.

Для нахождения границ областей плоскостей (M_n, N_n) исследуем уравнения возможных двукратных, трехкратных и четырехкратных точек [1] уравнения (9):

$$3p^4{}_n+4M_np^3{}_n+Cp^2{}_n+2CM_np_n-N_n=0,$$
$$6p^3{}_n+6M_np^2{}_n+Cp_n+CM_n=0,$$
$$18p^2{}_n+12M_np_n+C=0.$$

Области и границы между ними, соответствующие различным основным типам траекторий корней уравнения (9), на рисунке обозначены римскими цифрами от I до XVIII. Одинаковые типы траекторий корней при различных соотношениях R имеют одинаковые обозначения. Для каждого из основных типов корневых годографов в таблице приведен численный пример. Крестиками нанесены положения начальных, кружком — предельной точек, а асимптоты проведены штриховыми линиями.

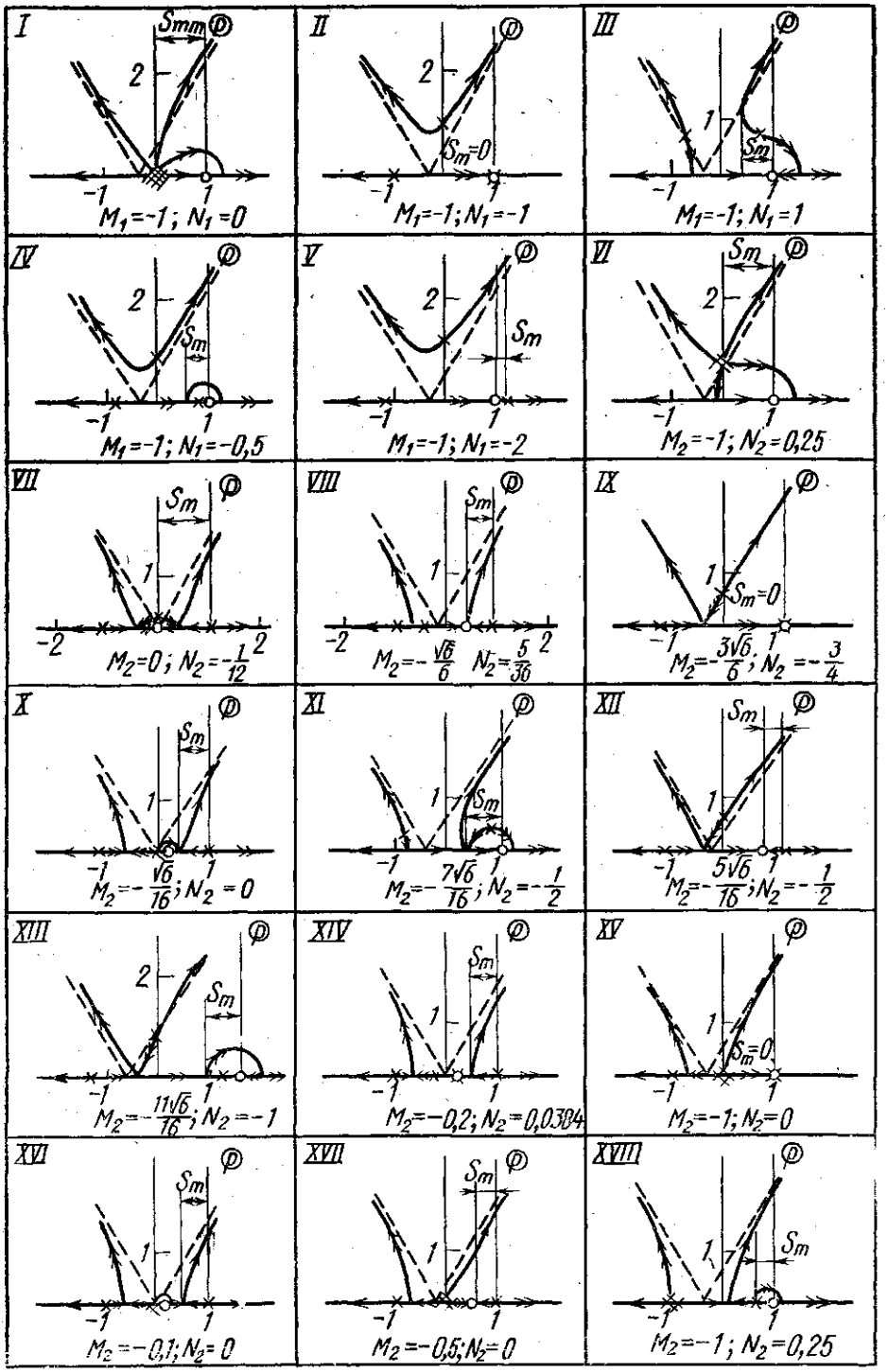
1. При $R=0$ (см. рисунок, *а*) границами, разделяющими плоскость (M_1, N_1) на области с разными типами траекторий корней, являются прямая $N_1=0$, изображенная сплошной линией и соответствующая основному (зеркальному) I типу траекторий корней с четырехкратной точкой, и кривая $N_1=-M^4{}_1$, изображенная прерывистой линией и соответствующая основному (зеркальному) II вырожденному типу траекторий корней, когда одна из начальных точек совпадает с предельной. Условие образования вырожденных типов траекторий корней можно также получить, разделив в уравнении (9) $(p^4{}_n+Cp^2{}_n+N_n)$ на (p_n+M_n) и приравняв остаток нулю.

2. При $R>0$ (см. рисунок, *б*) границами, разделяющими плоскость (M_2, N_2) на области с разными типами траекторий корней, являются прямая $N_2=0{,}25$, изображенная сплошной линией и соответствующая основному (зеркальному) VI типу траекторий корней с двукратными комплексно-сопряженными точками, и кривая $N_2=-M^2{}_2(1+M^2{}_2)$, изображенная прерывистой линией и соответствующая основному (зеркальному) II вырожденному типу траекторий корней. Условия существования комплексно-сопряженных кратных точек можно также найти, записав уравнение (9) в виде

$$(p^4{}_n+Cp^2{}_n+N_n)+K_n(p_n+M_n)=(p_n-x-jy)^2(p_n-x+jy)^2=0$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p_n.

3. При $R<0$ (см. рисунок, *в*) границами, разделяющими плоскость (M_2, N_2) на области с разными типами траекторий корней, являются две прямые $N_2=-\frac{1}{12}\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}M_2$, изображенные сплошными линиями и соответствующие типам траекторий корней с трехкратной точкой, и кривая $N_2=M^2{}_2(1-M^2{}_2)$, изображенная прерывистой линией и соответствующая вырожденным типам траекторий корней. Взаимному пересечению этих прямых в точке $\left(0;\ -\frac{1}{12}\right)$ соответствует VII симметричный тип траекторий корней с двумя трехкратными точками,



Основные типы траекторий корней систем класса [4; 1]

а их пересечению с кривой в точках $\left(\mp\frac{\sqrt{6}}{6};\ \frac{5}{36}\right)$ — основной (зеркальный) VIII тип траекторий корней с совпадающими начальной, предельной и двукратной точками и в точках $\left(\mp\frac{3\sqrt{6}}{6};\ -\frac{3}{4}\right)$ — основной (зеркальный) IX тип траекторий с одной трехкратной и совпадающими начальной и предельной точками. Эти точки разделяют прямые $N_2=-\frac{1}{12}\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}M_2$ на участки с основными (зеркальными) X, XI, XII, XIII типами траекторий корней с одной трехкратной точкой, а кривую $N_2=M^2_2(1-M^2_2)$ — на участки с основными (зеркальными) II, XIV, XV вырожденными типами траекторий корней.

С помощью обратных преобразований (изменение масштаба, выбор начальных точек и перенос мнимой оси) нетрудно перейти от корневых годографов уравнения (9) к корневым годографам исходного уравнения (1) при заданных значениях его коэффициентов a_i и b_j. Обозначим положение мнимой оси на корневых годографах таблицы через p в кружочке и для простоты оставим масштаб и положение начальных точек без изменения.

Из рассмотрения основных типов траекторий корней, данных в таблице, можно сделать ряд выводов.

Системы класса [4; 1] имеют такие же асимптотические свойства, что и система класса [3; 0], исследованные в работах [1, 2]. При $|K|\to\infty$ траектории корней приближаются к асимптотам, выходящим из центра асимптот $a^*=\frac{1}{3}\left(-\frac{a_1}{a_0}+\frac{b_1}{b_0}\right)$ под углами $\varphi_N=\pi N/3$ ($N=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3$) к положительному направлению действительной оси. Наличие предельной точки обусловливает более разнообразные свойства систем класса [4; 1] по сравнению с системами класса [4; 0], анализ которых проведен в [2].

Для систем класса [4; 1], устойчивых в некоторой области значений K, асимптоты, выходящие под углами $\pm\pi/3$, всегда пересекают мнимую ось. К этим асимптотам стремятся ветви положительных корневых годографов ($K>0$), поэтому самовозбуждение систем всегда происходит при отрицательной обратной связи для всех типов траекторий корней (см. таблицу).

В некоторых случаях системы класса [4; 1] могут самовозбуждаться и при положительной обратной связи ($K<0$). Для этого предельная точка должна располагаться правее всех начальных точек (см. I, III, IV, VI, XI, XIII и XVIII типы траекторий корней таблицы).

Критические частоты определяются из уравнения возможных критических частот [1] (для устойчивых разомкнутых систем):

$$a_0b_0\omega^4_k+(a_1b_1-a_2b_0)\omega^2_k+(a_4b_0-a_3b_1)=0,$$

а соответствующие этим частотам критические значения свободного параметра — по любой из формул

$$-K_k=\frac{a_4-a_2\omega_k^2+a_0\omega_k^4}{b_1}=\frac{a_3-a_1\omega_k^2}{b_0}.$$

Возможно также апериодическое возбуждение системы, обусловленное переходом одного из действительных корней в правую полуплоскость при значении свободного параметра $K_a=-a_4/b_1$.

Максимально достижимая степень устойчивости систем класса [4; 1] равна $S_{mm}=a_1/4a_0$, однако для большинства типов траекторий корней

она меньше этой величины. Максимальная степень устойчивости S_m основных типов траекторий корней показана в таблице. Ее можно определить, построив для каждого из примеров таблицы полный корневой годограф [3], из которого находится значение свободного параметра K_m, соответствующее максимальному удалению корней от мнимой оси комплексной плоскости p. С помощью полного корневого годографа можно также проследить за изменением степени устойчивости $S \leqslant S_m$ от свободного параметра K. Как видно из таблицы, максимальная степень устойчивости может достигаться:

1) в кратных точках (для большинства типов траекторий корней);

2) на вертикальной прямой, проведенной через три корня (один действительный, два комплексно-сопряженных) с одинаковыми действительными частями (III, V, XII, XVII типы траекторий корней);

3) в точках совпадения одной из начальных точек с предельной (II, VIII, IX, XV вырожденные типы траекторий корней).

Знание типов траекторий корней позволяет также целенаправленно выбирать параметры корректирующих устройств, включенных параллельно или последовательно с неизменяемой частью системы более низкого порядка. Так, например, вырожденные типы траекторий корней можно использовать для синтеза одноконтурных систем, имеющих один нежелательный полюс, компенсируя его нулем. Подбирая параметры корректирующего устройства, можно добиться такого взаимного расположения основных точек, при котором доминирующие ветви траекторий корней в некоторой области значения K будут удаляться от мнимой оси (например, в случае III, XI, XVII типов траекторий корней).

Аналогично можно исследовать зеркальные типы траекторий корней, воспользовавшись таблицей. Динамические свойства систем класса [4; 1] в этом случае близки к свойствам систем класса [3; 0].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Автоматика и телемеханика, 1955, **16**, № 3, с. 288. [3] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, **14**, № 1, с. 60.

Поступила в редакцию
05.06.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 3

УДК 533.9.082.5

РАДИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АТОМОВ Xe В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ СТОЛБЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В СМЕСИ He—Xe

Л. М. Волкова, А. М. Девятов, Е. А. Кралькина, Л. В. Шибкова

(кафедра электроники)

Развитие лазерной техники и появление газоразрядных приборов, работающих на смесях газов, стимулировали изучение пространственного разделения компонент смеси, которое может влиять на КПД приборов. Явление разделения компонент смеси, называемое катафорезом, может происходить под действием электрического поля в продольном и радиальном направлениях.

В работах, посвященных исследованию этого явления, до сих пор обычно учитывали лишь один из видов разделения. В работе [1] изу-