

С использованием формул (7), (8) была рассчитана степень поперечного перераспределения концентрации атомов примеси $n_{20}/n_2(R)$ в зависимости от расстояния до катодной границы столба.

Частота ионизации аппроксимировалась линейной зависимостью от энергии [11], подвижности ионов He и Xe были взяты из работы [12]. Функция распределения электронов по скоростям предполагалась максвелловской.

Из рис. 2 видно, что результаты эксперимента и теоретического расчета находятся в удовлетворительном согласии.

Таким образом, экспериментально получены зависимости степени радиального перераспределения легкоионизируемой примеси ксенона в He—Xe-разряде в широком диапазоне давлений и разрядных токов. Кроме того, показано, что в положительном столбе при изучении радиального катафореза надо учитывать и продольное разделение компонент смеси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мискиннова Н. А. Канд. дис. М., 1970. [2] Bleekrode R., Laarse J. W. v. d. J. Appl. Phys., 1969, 40, N 6, p. 2401. [3] Waszink J. H., Polman J. J. Appl. Phys., 1969, 40, N 6, p. 2403. [4] Тихонов А. Н. ДАН СССР, 1963, 153, № 3, с. 501. [5] Меченов А. С. Бюллетень алгоритмов и программ, П001412, № 3, ВНИИЦентр, 1975. [6] Волкова Л. М., Девятов А. М. и др. В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщение. Новосибирск, 1978, с. 200. [7] Латуш Е. Л., Михалевский В. С. и др. Квант. электроника, 1976, № 10, с. 2306. [8] Bleekrode R. J. Appl. Phys., 1967, 38, N 3, p. 5062. [9] Пекар Ю. А. ЖТФ, 1966, 36, № 8, с. 1372. [10] Пекар Ю. А. ЖТФ, 1967, 37, № 6, с. 1112. [11] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966, с. 329—331. [12] Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М. Явление переноса в слабоионизованной плазме. М.: Атомиздат, 1975, с. 326.

Поступила в редакцию
12.06.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 3

УДК 536.2:517.947

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА ПО КОСВЕННЫМ ДАННЫМ

В. Б. Гласко, Е. Е. Кондорская, Ш. М. Бидзинов

(кафедра математики)

1. В ряде работ с помощью регуляризирующих алгоритмов [1] изучается тепловое состояние физических систем в условиях, когда источник теплового поля недоступен непосредственному измерению [2—5]. Эти задачи принадлежат к классу обратных.

В частности, в работе [2] рассмотрена задача о локализации теплового источника по некоторым характеристикам заданного вне занимаемой им области температурного поля, отмечено ее прикладное значение, а также рассмотрены вопросы единственности и корректности в рамках двумерной плоской модели с точечным источником заданной интенсивности.

На практике, однако, далеко не всегда можно считать источник точечным. Представляет также интерес определение его интенсивности, которая, как правило, неизвестна. При этом принципиальным является вопрос о единственности решения — вне зависимости от конкретной модели источника, — так как положительный ответ на него гарантирует

правильность постановки задачи. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

2. Рассмотрим сначала, аналогично [2], двумерную плоскую модель с точечным источником интенсивности $f(t)$. Тогда температурное поле удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 U - \frac{\partial U}{\partial t} &= f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x} &\equiv (x_1, x_2) \in R_2; U|_{t=0} = 0, \\ (-\infty < |\mathbf{x}| < +\infty, t > 0); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда

$$U(\mathbf{x}, t) = \int_0^t G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Могут быть поставлены следующие задачи об определении характеристик источника:

а) интенсивность источника $f(t)$ известна, требуется найти его положение, т. е. $\mathbf{x}_0$;

б) известно $\mathbf{x}_0$, требуется найти $f(t)$;

в) требуется одновременно определить $f(t)$ и $\mathbf{x}_0$.

При этом существен вопрос о минимальности информации о температурном поле $U(\mathbf{x}, t)$, необходимой для однозначного решения этих задач.

Вопрос о единственности решения первой из названных задач, как уже отмечено, рассмотрен в [2]. Оказалось, что в случае существования решения для однозначного его определения достаточно указать значения температуры в трех точках, не лежащих на одной прямой, в произвольный момент $t > 0$. При этом интенсивность $f(t)$ полагалась непрерывной и неотрицательной.

Для второй задачи («б»), в предположении, что $f(t)$ принадлежит классу непрерывных функций ограниченного роста, оказывается справедливой

Теорема 1. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0$ — фиксированные точки плоскости, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_0$. Тогда решение $\{U(\mathbf{x}, t), f(t)\}$ задачи (1) с дополнительным условием $U|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} = \varphi(t)$ единственно.

Таким образом, для однозначного определения $f(t)$ достаточно в этом случае задать температуру (как функцию времени) в одной произвольной точке. Справедливость этого утверждения вытекает из эквивалентности задачи интегральному уравнению 1-го рода типа свертки.

Потребовав аналитичность $f(t)$, можем установить с помощью, например, асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) анализа следующий факт.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{x}_0$ — заданное значение и $f(t)$ принадлежит A — классу аналитических на $[0, t]$ функций. Тогда решение $\{U(\mathbf{x}, t), f(t)\}$ задачи (1) с дополнительными условиями $U(\mathbf{x}_l, t_l) = \varphi(\mathbf{x})$, $t_l > 0$, $\mathbf{x}_l \in l$ (l — некоторая прямая), единственно.

Подчеркнем, что в данном случае температура задана в момент t_l на некоторой прямой.

Не приводя результатов расчета, отметим, что решение задачи, рассмотренной в теореме 1, было успешно выполнено на ЭВМ в рамках некоторых моделей с помощью специального регуляризирующего алгоритма [5].

Рассмотрим теперь вопрос о единственности одновременного определения величин $\mathbf{x}_0, f(t)$ (случай «в»).

Теорема 3. Пусть x_s ($s=1, 2, 3$), $x_s \neq x_0$ — фиксированные точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Тогда решение $\{U(x, t), f(t), x_0\}$ задачи 1 с дополнительными условиями $U|_{x=x_s} = \varphi(t)$ и $U(x_s, t_1) = v_s$ ($s=2, 3$; $t_1 > 0$; v_s задана) единственно.

При доказательстве использовался асимптотический анализ (при $t \rightarrow 0$) в предположении аналитичности $f(t)$.

Таким образом, для однозначного определения характеристик теплового источника оказывается достаточным задать температуру в трех точках, не лежащих на одной прямой: в одной из них — как функцию времени, а в двух других — в некоторый произвольный момент.

Доказанные факты позволяют формулировать итерационный процесс для поиска обеих величин одновременно.

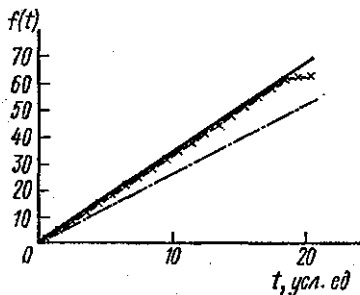


Рис. 1. Интенсивность источника $f(t)$: — точное значение $f(t)=t$, ---- начальное приближение $f_{\text{нач}}=0,8t$, $\times-\times$ — решение

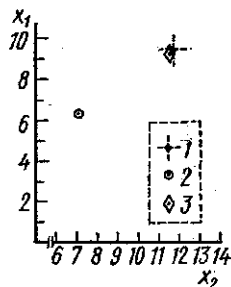


Рис. 2. Определение координат источника: 1 — точное значение $x_0 = (x_1, x_2) = (9,5; 11,7)$; 2 — начальное приближение $(6,3; 7,1)$; 3 — решение $(9,43; 11,63)$

Пусть $x^{(0)}, f^{(0)}(t)$ — некоторые начальные приближения и пусть уже найдены $x_0, f^{(s-1)}(t)$. Тогда $f^{(s)}(t)$ определяется задачей о минимизации сглаживающего функционала Тихонова относительно $f(t)$, где $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается по принципу невязки. В качестве алгоритма минимизации используется переход к уравнению Эйлера.

Вслед за тем $x^{(s)}_0$ (при найденной $f^{(s)}(t)$) определяется минимизацией функционала

$$\sum_{n=1}^N \{U[x_n, t_1, x_0] - \tilde{\varphi}(x_n)\}^2.$$

(Температура предполагается заданной в N точках.) Процесс заканчивается по условию совпадения соседних приближений с заданной точностью.

На рис. 1, 2 представлены некоторые результаты такого расчета в сравнении с начальным приближением и точным решением задачи. Мы не останавливаемся здесь на аналитическом обосновании сходимости процесса.

3. Пусть теперь источник не является точечным. Данные о температурном поле, которое он порождает, относятся к области вне источника. Можно анализировать модели, отвечающие различным стадиям его развития: а) источник, локализованный в заданной области g , неизвестной равномерной интенсивности, которая подлежит определению:

$f(x, t) = \chi(x)\psi(t)$; б) финитный во времени источник неизвестной интенсивности $f(x, t)$, распределенный в заданной области g ; в) финитный во времени источник неизвестной интенсивности $f(x, t)$, распределенный в области g , точные границы которой неизвестны; г) наконец, развитый источник, интенсивность которого зависит также и от температуры. (Модель точечного источника при этом следует рассматривать как начальную, узколокальную стадию.) Мы ограничимся здесь рассмотрением первой стадии (а), оставаясь по-прежнему в рамках плоской двумерной задачи ($x \in R_2$).

4. Рассмотрим задачу об определении интенсивности источника как функции времени в заданной области g (случай «а»). $U(x, t)$ при этом описывается условиями

$$\begin{aligned} a^2 \Delta U &= \frac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} -f(t), & x \in g \\ 0 & x \notin g, \end{cases} \\ U|_{t=0} &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае справедлива аналогичная теореме 1 и вытекающая из тех же соображений

Теорема 4. Задача (2) при условиях $|U| < \infty$ и $U(x_1, t) = \mu(t)$, где $x_1 \notin g$ и $f(t) \in C[0, T]$, имеет единственное решение.

Справедлива также теорема 4¹, утверждающая единственность решения аналогичной задачи, в которой $f(t)$ заменена на $\mathcal{F}(t) = \psi(t)v(x)$ относительно $\psi(t) \in C[0, T]$ при любой знакоопределенной кусочно-непрерывной $v(x)$.

Заметим, что температуру для однозначного определения $f(t)$ при этом достаточно задать как функцию времени в одной произвольной точке, как и в случае точечного источника.

При условии аналитичности $f(t)$ асимптотический анализ (при $t \rightarrow 0$) позволяет убедиться в единственности решения задачи (2) в случае, если температура задана в одной точке, не принадлежащей g , в фиксированный момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. [2] Кондорская Е. Е., Гласко В. Б. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1982, 23, № 1, с. 79. [3] Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Журн. выч. матем. и матем. физики, 1967, 7, № 4, с. 910. [4] Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И., Шкляров И. Н. Журн. выч. матем. и матем. физики, 1979, 19, № 3, с. 768. [5] Гласко В. Б., Кулик Н. И., Шкляров И. Н. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. матем. и киберн., 1978, № 1, с. 36.

Поступила в редакцию
10.07.80