ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 3

УДК 37.226.2:539.166.06

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МЁССБАУЭРОВСКОЙ ДИФРАКЦИИ

М. А. Андреева, С. Ф. Борисова

(кафедра физики твердого тела)

Динамическая теория мёссбауэровской дифракции и аномальные эффекты, возникающие при ядерном резонансном рассеянии мёссбауэровского излучения на идеальных кристаллах, рассматривались в ряде работ [1—4]. Теория мёссбауэровской дифракции существенно сложнее рентгеновской в связи с тензорным характером γ-резонансного взаимодействия при наличии сверхтонких взаимодействий (СТВ). Решение динамической задачи в настоящее время получено в основном для дипольных переходов, а в случае высших мультипольностей — только для специальных направлений осей СТВ [4].

В данной работе мы вводим в динамическую теорию дифракции методы прямого тензорного исчисления, получившие интенсивное развитие в оптике видимого света благодаря работам Ф. И. Федорова [5]. Ковариантное решение трехмерной системы векторных уравнений не является более сложным, чем решение поперечной задачи. Динамические коэффициенты, рассматриваемые как полные трехмерные тензоры, имеют предельно простой вид, их структура определяется анизотропными свойствами среды, зависящими от типа СТВ и мультипольности резонансного перехода. В большинстве случаев ковариантное решение удается довести до конца без конкретизации геометрии рассеяния; особенности решения определяются только структурой динамических коэффициентов.

1. **Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости мёссбауэровской среды.** Исходной величиной при формулировке динамической теории дифракции является выражение для диэлектрической проницаемости среды, которое в случае резонансного взаимодействия можно представить в виде

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = 1 - \frac{4\pi}{\omega^2}\frac{N}{2I_g+1}\sum_{m_e, m_g}\frac{\mathbf{J}^{m_e, m_g}(\mathbf{k}_2)\cdot \overset{*}{\mathbf{J}}{}^{m_e, m_g}(\mathbf{k}_1)}{\hbar(\omega-\omega_R^{m_e, m_g})+i\Gamma/2}, \tag{1}$$

где N — плотность резонансных ядер, $\hbar\omega_R^{m_e, m_g}$ — резонансная энергия сверхтонкого перехода; остальные обозначения общеприняты [1]. Точка между векторами токов $\mathbf{J}(\mathbf{k}_1)$ и $\mathbf{J}(\mathbf{k}_2)$ обозначает их внешнее произведение (диаду или бивектор). Из теории мультипольного излучения можно получить общее выражение для тока чистого мультипольного перехода в виде (несущественные фазовые множители мы здесь опускаем)

$$\mathbf{J}_{ML}^{m_e, m_g}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2\pi c^2\Gamma_\gamma}{k}}\langle I_g m_g LM \mid I_e m_e\rangle \sum_{\lambda(m)} Y_{Lm}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\langle 1\lambda Lm \mid LM\rangle \hat{\mathbf{h}}_\lambda, \tag{2}$$

$$\mathbf{J}_{EL}^{m_e, m_g}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2\pi c^2\Gamma_\gamma}{k}}\langle I_g m_g LM \mid I_e m_e\rangle \sqrt{\frac{2L+1}{2(L+1)}}\sum_{\lambda(m)} Y_{L-1\,m}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\times$$
$$\times\langle 1\lambda L-1 m \mid LM\rangle \hat{\mathbf{h}}_\lambda. \tag{2a}$$

Разложение векторов $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ в (2) проведено по сферическим ортам системы осей СТВ $\hat{\mathbf{h}}_\lambda$. Используя явное выражение для сферических функций $Y_{lm}(\mathbf{k}/k)$, в (2)—(2а) можно выделить не зависящую от волнового вектора $\mathbf{k}$ часть: это будут электрические в случае перехода электрического типа EL или магнитные в случае перехода магнитного типа ML мультипольные моменты ядерных переходов, зависящие только от изменения магнитного квантового числа при переходе $M=m_e-m_g$:

$$\hat{Q}^{(L)}(M)=\sqrt{\frac{(2L-1)!!}{(L+1)(L-1)!}}\sum_{\lambda,\mu,\ldots,\nu,\rho}\;\sum_{m_1,m_2,\ldots,m}\langle 1\lambda L-1m_1|LM\rangle\times$$

$$\times\langle 1\mu L-2m_2|L-1m_1\rangle\ldots\langle 1\nu 1\rho|2m\rangle\,\hat{\mathbf{h}}_\lambda\cdot\hat{\mathbf{h}}_\mu\cdot\ldots\cdot\hat{\mathbf{h}}_\nu\cdot\hat{\mathbf{h}}_\rho. \qquad (3)$$

Сферические компоненты этих тензоров имеют наиболее простой вид: $Q_p{}^{(L)}(M)\sim\delta_{pM}$. Выражение (3) определяет ковариантное представление этих тензоров. Так, для дипольного перехода ($L=1$) из (3) получаем

$$Q^{(1)}(M)=\hat{\mathbf{h}}_M.$$

Для квадрупольных моментов перехода ($L=2$) из (3) следует

$$\hat{Q}^{(2)}(M=\pm 2)=\hat{\mathbf{h}}_{\pm1}\cdot\hat{\mathbf{h}}_{\pm1};\;\hat{Q}^{(2)}(M=0)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1+3\hat{\mathbf{h}}_0\cdot\hat{\mathbf{h}}_0),$$

$$\hat{Q}^{(2)}(M=\pm 1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{h}}_{\pm1}\cdot\hat{\mathbf{h}}_0+\hat{\mathbf{h}}_0\cdot\hat{\mathbf{h}}_{\pm1}).$$

Из формулы (1) очевидно, что характеристикой среды для переходов высшей мультипольности являются тензоры мультипольных поляризуемостей

$$\hat{G}^{(2L)}(M,\omega)=A(M,\omega)\,\hat{Q}^{(L)}(M)\cdot\hat{Q}^{(L)*}(M)$$

($A(M,\omega)$ — комплексные резонансные множители), именно для них возможно ввести функцию распределения в пространстве $\rho(\mathbf{r})$ и с их помощью определить функцию диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)$ в случае EL:

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)=1+\left(\frac{c}{\omega}\right)^{2(L-1)}\underbrace{\nabla\cdot\nabla\cdot\ldots\cdot\nabla}_{L-1}:[L-1]:$$

$$:\sum_M\hat{G}^{(2L)}(M,\omega)\,\rho(\mathbf{r}):[L-1]:\underbrace{\nabla\cdot\nabla\cdot\ldots\cdot\nabla}_{L-1} \qquad (4)$$

или, с учетом того, что $\mathbf{J}_{ML}(\mathbf{k})=\alpha\left[\mathbf{J}_{EL}(\mathbf{k}),\,\frac{\mathbf{k}}{k}\right]$ и $\mathbf{B}_k=\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\,\mathbf{E}_k\right]$,

функцию магнитной проницаемости $\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)$ в случае ML, имеющую вид, полностью аналогичный (4). Поскольку тензоры $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)$ и $\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)$ являются в $\mathbf{r}$-пространстве операторами, переход в $\mathbf{k}$-пространство не может быть выполнен вне связи

$$\vec{\mathcal{D}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\,\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\omega),$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\,\vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r},\omega).$$

2. **Уравнения динамической теории дифракции в ковариантном виде.** При рассмотрении дифракции необходимо сделать предположение

о трехмерной пространственной периодичности функции $\rho(\mathbf{r})$. Разложим $\rho(\mathbf{r})$ по векторам обратной решетки $\boldsymbol{\tau}_p$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_p F(\boldsymbol{\tau}_p) \exp\left(-i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\tau}_p \mathbf{r}\right)$$

и представим векторы поля в виде разложения по плоским волнам:

$$\{\vec{\mathscr{E}}, \vec{\mathscr{D}}, \vec{\mathscr{B}}, \vec{\mathscr{H}}\} = \sum_n \{\mathbf{E}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{H}_n\} \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_n \mathbf{r}).$$

Тогда уравнения связи ω, $\mathbf{k}$-амплитуд поля получим в виде

$$\mathbf{D}_n = \sum_p \widehat{\varepsilon}_{np}(\mathbf{k}_{np}, \omega)\, \mathbf{E}_p \equiv \sum_p [\delta_{np} + \widehat{\chi}_{np}^{EL}(\mathbf{k}_{np}, \omega)]\, \mathbf{E}_p,$$

$$\mathbf{B}_n = \sum_p \widehat{\mu}_{np}(\mathbf{k}_{np}, \omega)\, \mathbf{H}_p \equiv \sum_p [\delta_{np} + \widehat{\chi}_{np}^{ML}(\mathbf{k}_{np}, \omega)]\, \mathbf{H}_p,$$

где

$$\widehat{\chi}_{np}^{EL} = (\widehat{\chi}_{np}^{ML}) = F(\tau_{n-p}) \left(\frac{c}{\omega}\right)^{2(L-1)} \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{k}_n \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \mathbf{k}_n : [L-1] : \sum_M G^{(2L)}(M, \omega) : [L-1] : \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{k}_p \cdot \ldots \cdot \mathbf{k}_p.$$

Отметим, что зависимость $\widehat{\chi}_{np}^{EL}, \widehat{\chi}_{np}^{ML}$ от τ_{n-p} определяется только структурным множителем $F(\tau_{n-p})$. Можно показать, с учетом малости χ_{np}, что $\widehat{\varepsilon}_{np}^{-1} \approx \delta_{np} - \widehat{\chi}_{np}^{EL}$ и $\widehat{\mu}_{np}^{-1} \approx \delta_{np} - \widehat{\chi}_{np}^{ML}$. Тогда из уравнений Максвелла несложно получить динамическую систему уравнений для любого из векторов поля:

$$(1 + m_n^{\times 2})\, \mathbf{A}_n = \sum_p \widehat{\alpha}_{np}^A \mathbf{A}_p; \quad \mathbf{A}_n \equiv \{\mathbf{E}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{H}_n, \mathbf{B}_n\},$$

где

$$\widehat{\alpha}_{np}^E = (-\widehat{\chi}_{np}^{EL} + m_n^\times \widehat{\chi}_{np}^{ML} m_p^\times); \quad \widehat{\alpha}_{np}^H = (m_n^\times \widehat{\chi}_{np}^{EL} m_p^\times - \widehat{\chi}_{np}^{ML});$$

$$\widehat{\alpha}_{np}^D = (m_n^{\times 2} \widehat{\chi}_{np}^{EL} + m_n^\times \widehat{\chi}_{np}^{ML} m_p^\times); \quad \widehat{\alpha}_{np}^B = (m_n^\times \widehat{\chi}_{np}^{EL} m_p^\times + m_n^{\times 2} \widehat{\chi}_{np}^{ML}),$$

$m^\times$ — тензор, дуальный вектору $\mathbf{m} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k}$ (называемому в оптике вектором рефракции), т. е. $m^\times \mathbf{a} = [\mathbf{ma}]$.

3. **Решение системы векторных уравнений в двухволновом случае.** В случае EL-переходов более удобной при решении является система для векторов $\mathbf{H}_n$ (в случае ML-переходов соответственно для векторов $\mathbf{E}_n$). Выпишем, с учетом $m_n^{\times 2} = \mathbf{m}_n \cdot \mathbf{m}_n - \mathbf{m}_n^2$ и $(\mathbf{m}_n \mathbf{H}_n) = 0$ (при $\widehat{\chi}_{np}^{ML} = 0$), динамическую систему уравнений в двухволновом случае:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{H}_1 &= \widehat{g}_{11} \mathbf{H}_1 + \widehat{g}_{12} \mathbf{H}_2, \\ \lambda_2 \mathbf{H}_2 &= \widehat{g}_{21} \mathbf{H}_1 + \widehat{g}_{22} \mathbf{H}_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где мы ввели обозначения

$$\lambda_n = 1 - \mathbf{m}_n^2; \quad \widehat{g}_{np} = m_n^\times \widehat{\chi}_{np}^{EL} m_p^\times; \quad n, p = 1, 2.$$

В системе (5) исключим один из векторов, например $\mathbf{H}_2$, тогда для вектора $\mathbf{H}_1$ получим векторное уравнение

$$\{(\lambda_1 - \widehat{g}_{11}) - \widehat{g}_{12} (\lambda_2 - \widehat{g}_{22})^{-1} \widehat{g}_{21}\} \mathbf{H}_1 \equiv \widehat{\Psi}_1 \mathbf{H}_1 = 0. \tag{6}$$

1^0. В случае нерасщепленной резонансной линии для дипольного перехода, так же как и в случае рассеяния на электронах, функция диэлектрической проницаемости является скаляром. Тогда $\widehat{g}_{np}=a_{np}m_n^{\times}m_p^{\times}$, а уравнение (6) принимает вид, соответствующий случаю одноосного кристалла (с осью, параллельной $[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]$):

$$U+V[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]\cdot[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]=0,$$

$$U=(\lambda_1+a_{11}\mathbf{m}_1^2)(\lambda_2+a_{22}\mathbf{m}_2^2)-a_{12}a_{21}\mathbf{m}_1^2\mathbf{m}_2^2;\ V=a_{12}a_{21}. \tag{7}$$

Несложно из (7) получить волновое уравнение [5]:

$$U^2(U+V[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]^2)=0. \tag{8}$$

При

$$U=0$$

собственными поляризациями (7) являются, очевидно, $\mathbf{H}_1\|[\mathbf{m}_1[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]]$ и $\mathbf{H}_2\|[\mathbf{m}_2[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]]$ (s-поляризация для векторов $\mathbf{E}_{1,2}$). При

$$U+V[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]^2=0 \tag{9}$$

собственные поляризации ищем по общей формуле

$$\mathbf{H}_1\ \|\ \overline{\overline{\Psi}}_1\mathbf{d}, \tag{10}$$

где $\mathbf{d}$ — произвольный вектор; черта над тензором означает взаимный тензор. Поскольку

$$\overline{(U+V[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]\cdot[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2])}=U(U-V[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]^{\times^2}),$$

для случая (9) собственные поляризации $\mathbf{H}_1\|[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]\|\mathbf{H}_2$ — это p-поляризации для векторов $\mathbf{E}_{1,2}$.

Интересно отметить, что для $E2$-перехода функция диэлектрической проницаемости является тензором даже в отсутствие СТВ [1]:

$$\widehat{\chi}_{np}^{E2}=b\left[(\mathbf{m}_n\mathbf{m}_p)+\mathbf{m}_p\cdot\mathbf{m}_n-\frac{2}{3}\mathbf{m}_n\cdot\mathbf{m}_p\right].$$

Структура же уравнения (7) не изменится, но теперь

$$U=(\lambda_1-b\mathbf{m}_1^2)(\lambda_2-b\mathbf{m}_2^2)-b^2(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)^2,\ V=-b^2[(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)+\mathbf{m}_1^2\mathbf{m}_2^2].$$

Соответственно не изменится и характер решения.

2^0. Рассмотрим теперь случай, когда тензоры $\widehat{\chi}_{np}^{EL}$ пропорциональны диадам вида

$$\widehat{\chi}_{np}^{EL}=b_{np}\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{c}_p^{*}. \tag{11}$$

Такой вид тензоров $\widehat{\chi}_{np}^{EL}$ соответствует отдельным зеемановским компонентам спектра для излучения любой мультипольности. Для сверхтонких $E1$-переходов $\mathbf{c}_n=\mathbf{c}_p=\widehat{\mathbf{h}}_M$ ($M=0,\ \pm1$). В случае $E2$ для компонент спектра с $M=\pm2$ получаем $\mathbf{c}_q=(\mathbf{m}_q\widehat{\mathbf{h}}_{\pm1})\,\widehat{\mathbf{h}}_{\pm1}$,

для $M=\pm1$: $$\mathbf{c}_q=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(\mathbf{m}_q\widehat{\mathbf{h}}_0)\,\widehat{\mathbf{h}}_{\pm1}+(\mathbf{m}_q\widehat{\mathbf{h}}_{\pm1})\,\widehat{\mathbf{h}}_0\},$$

для $M=0$: $$\mathbf{c}_q=\frac{1}{\sqrt{6}}\{\mathbf{m}_q+3(\mathbf{m}_q\widehat{\mathbf{h}}_0)\,\widehat{\mathbf{h}}_0\}\ (q=h,\ p).$$

Зависимость скалярных множителей b_{np} от n, p может определяться структурными множителями и анизотропией вероятности эффекта Мёссбауэра. Вычисление детерминанта уравнения (7) в этом случае по общим формулам тензорной алгебры приводит к волновому уравнению вида

$$\lambda_1^2\lambda_2^2\{(\lambda_1+b_{11}s_{11})(\lambda_2+b_{22}s_{22})-b_{12}b_{21}s_{11}s_{22}\}=0, \tag{12}$$

где мы ввели обозначение

$$s_{np}=([\mathbf{m}_n\mathbf{c}_n][\mathbf{m}_p\mathbf{c}_p^*]).$$

Если принять, как обычно, линейную зависимость λ_2 от λ_1, то выражение в фигурных скобках в (12) является полиномом второй степени относительно λ_1, т. е. с кристаллом взаимодействуют только две из четырех возможных в условиях дифракции волн. Исходя из (10) несложно вычислить поляризацию этих волн: $\mathbf{H}_1^{(i)}\parallel[\mathbf{m}_1^{(i)}\mathbf{c}_1]$, $\mathbf{H}_2^{(i)}\parallel[\mathbf{m}_2^{(i)}\mathbf{c}_2]$, $i=1, 2$.

Можно показать, что при всех возможных различиях b_{np} выполняется соотношение $b_{11}b_{22}=b_{12}b_{21}$. Тогда для точного угла Брэгга возможно еще одно нулевое решение $\lambda_1^{(1)}=\lambda_2^{(1)}=0$. Это эффект подавления [3]. Таким образом, мы показали возможность эффекта подавления для излучения любой мультипольности в наиболее общем виде.

Отметим, что включение в тензор $\widehat{\chi}_{np}^{EL}$ (11) скалярной добавки, соответствующей учету взаимодействия с электронной подсистемой, приводит к существенному усложнению решения. Этот случай в общем виде будет рассмотрен в следующей работе.

3^0. Рассмотрим теперь предельно асимметричный случай дифракции, когда оказывается необходимым учесть эффекты преломления при вычислении динамических коэффициентов и развитый подход может дать принципиально новые результаты. Если падающая (или дифрагированная) волна образует малый угол ϑ с поверхностью $(\vartheta^2\sim\widehat{\chi}_{np})$, необходимо использовать общую связь волновых векторов падающей $\mathbf{m}_0$, преломленной $\mathbf{m}_1$ и дифрагированной $\mathbf{m}_2$ волн ($\mathbf{q}$ — нормаль к поверхности кристалла):

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}_1=\mathbf{m}_0+\xi\mathbf{q}, \quad |\mathbf{m}_1|^2=1+2\xi(\mathbf{m}_0\mathbf{q})+\xi^2,\\ &\mathbf{m}_2=\mathbf{m}_1+\boldsymbol{\tau}, \quad |\mathbf{m}_2|^2=1+2\xi(\mathbf{m}_0+\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{q})+\xi^2+(2\mathbf{m}_0+\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\tau}). \end{aligned} \tag{13}$$

В изотропном случае, однако, как непосредственно видно из уравнения (8), здесь все равно не возникает необходимости учитывать зависимость динамических коэффициентов от величины преломления. Иная ситуация возникает в анизотропном случае. С учетом (13) волновое уравнение (12) принимает вид (для простоты полагаем $b_{np}=b$ и $\mathbf{c}_n=\mathbf{c}_p\equiv\mathbf{c}$):

$$(\xi^2+2\xi\vartheta+bS_{10})(\xi^2+2\xi Q+bS_{20}+\delta)+b\xi P(2\xi Q+\delta)-b^2S_{10}S_{20}=0,$$

где

$$\vartheta=(\mathbf{m}_0\mathbf{q}),\quad Q=(\mathbf{m}_0+\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{q}),\quad \delta=(2\mathbf{m}_0+\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\tau});$$

$$S_{10}=|[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]|^2,\quad S_{20}=|[\mathbf{m}_0+\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{c}]|^2,\quad P=([\mathbf{m}_0\mathbf{c}][\mathbf{q}\mathbf{c}^*]+[\mathbf{m}_0\mathbf{c}^*][\mathbf{q}\mathbf{c}]).$$

Член, содержащий множитель P, соответствует возникающей зависимости динамических коэффициентов от величины преломления. Возникает своего рода «нелинейность» динамических уравнений. Динамические коэффициенты (или амплитуды рассеяния по [3]) теперь не могут быть вычислены независимо от решения системы уравнений.

Авторы признательны проф. Р. Н. Кузьмину за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Афанасьев А. М., Каган Ю. ЖЭТФ, 1965, 48, с. 327. [2] Афанасьев А. М., Каган Ю. ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1958. [3] Беляков В. А. УФН, 1975, 115, с. 553. [4] Воронцов В. И., Высоцкий В. И. ФТТ, 1975, 17, с. 2944. [5] Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976.

Поступила в редакцию
10.11.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 3

УДК 534.222

К ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПРИЕМНОЙ АНТЕННЫ

Е. А. Девятерикова, Л. К. Зарембо

(кафедра акустики)

Работа параметрической приемной антенны (ППА) основана на нелинейном взаимодействии в среде высокочастотной опорной волны с низкочастотной волной сигнала. Несмотря на некоторые недостатки (меньшую, чем в случае обычных антенн, чувствительность, относительно высокий уровень шумов и др.), ППА привлекает к себе внимание из-за того, что позволяет относительно простыми средствами получить острую направленность в области низких частот.

Приближенные теории ППА рассматривались в ряде работ [1—4]. Вместе с тем в настоящее время нет достаточно общей теории, позволяющей надежно в различных условиях выбирать наилучшие параметры антенны. Взаимодействие волн в общем случае, при значительных размерах базы (именно такие базы представляют интерес при приеме низкочастотного звука), происходит как в ближней, так и дальней зоне опорного излучения. Это требует учета дифракции [5] и затухания опорной волны. Решение, учитывающее эти эффекты, позволяет выбрать, например, оптимальный размер базы. Существование последнего качественно очевидно: при увеличении базы характеристика направленности сужается и для изотропных морских шумов принимаемый уровень снижается, однако при достаточно больших базах вследствие затухания и дифракции уменьшается и полезный сигнал, т. е. его отношение к шуму при больших базах может убывать. Это лишь один из аспектов оптимизации ППА, которому будет уделено внимание в этой работе. Здесь в приближении осесимметричного квазиплоского пучка сначала решается двумерная задача для ППА в среде с затуханием, а затем более общая задача с учетом в квазиоптическом приближении также и дифракции опорной волны.

Нелинейное волновое уравнение для потенциала скорости имеет вид [6]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0^2\Delta\varphi=\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\varphi)^2+a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+b\Delta\varphi\right], \qquad (1)$$

где c_0 — скорость звука, $a=(\gamma-1)/2c_0^2$ — нелинейный параметр, $\rho_0 b=\frac{4}{3}\eta+\eta'+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)$, ρ_0 — плотность, η и η' — сдвиговая и объемная вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

В первом приближении имеется квазиплоская опорная волна

$$\varphi_1=\Phi_1(x,\ x_0)\,e^{i(\omega_1 t-k_1 z)}, \qquad (2)$$