потока тепла на испарение изображен на кривой *3* рисунка; среднесуточная величина его составила 220 Вт/м^2, т. е. 80% от суммарного теплового потока. Таким образом, суточный ход потока тепла на испарение практически совпадает с суточным ходом суммарного потока тепла от моря в атмосферу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дитрих Г. (с участием К. Калле). Общая океанография. М.: ИЛ, 1962. [2] Хунджуа Г. Г., Гусев А. М. и др. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1977, 13, № 7, с. 753. [3] Андреев Е. Г., Гуров В. В., Хунджуа Г. Г. В кн.: Теплообмен V, т. 10. Киев, 1976. [4] Скорохватов Н. А. В кн.: Сборник трудов НИИ Гидрометеоприбор, 1977, № 69.

Поступила в редакцию
13.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 3

УДК 536.750.53:519.25

О ЧЕТВЕРТЫХ МОМЕНТАХ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. В. Толстопятенко

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Обычно при расчете флуктуаций в распределенных системах предполагают их гауссовыми [1, 2]. Между тем нелинейность системы обусловливает негауссов характер флуктуаций и приводит к ненулевым значениям высших кумулянтов. Ограничиваясь случаем локально изотропных сред, в которых третьи кумулянты равны нулю, мы рассчитаем четвертые кумулянты флуктуаций, которые в этом случае дают первые, обусловленные нелинейностью системы, поправки к найденным в гауссовом приближении четвертым моментам. Для примера мы применим общие формулы к двухпроводной линии и рассмотрим два характерных случая: распределенной нелинейной проводимости направляющих проводов и «линейной» линии, нагруженной на нелинейное сопротивление.

1. Четырехвременные кумулянты найдем с помощью флуктуационно-диссипационных соотношений, используя результаты работ [3, 4]. Обозначим четвертые кумулянты $Y_{1234} = \langle J_1, J_2, J_3, J_4 \rangle$ и адмитансную функцию (функцию Грина) линеаризованной системы $Y_{1,2} = \frac{\delta \langle J_1 \rangle}{\delta h_2}$. Здесь под индексами $1, 2, \ldots$ нужно понимать α_1, t_1, r_1; $\alpha_2, t_2, r_2; \ldots$ в пространственно-временном представлении или α_1, ω_1, k_1; α_2, ω_2, k_2 в спектральном представлении. $J_1 = \dot{B}_1$ — производные по времени от внутренних термодинамических параметров: зарядов, напряженностей полей и т. д., h_1 — сопряженные этим параметрам внешние силы, так что энергия взаимодействия имеет вид $V = -\sum_\alpha \int B_\alpha (t, r)\, h_\alpha (t, r)\, dr$.

Тогда из [3, 4] в неквантовом случае имеем

$$Y_{1234} = -4\{Y_{1,5} Y^B_{2,6} Y^B_{3,7} Y^B_{4,8} Z_{5,678}\}_s -$$

$$-4\{Y^B_{1,5} Y_{2,6} Y_{3,7} Y_{4,8} Z^B_{5,678}\}_s + 6\{Y_{1,5} Z_{2,6} Y^B_{3,7} Y^B_{4,8} E_{56,78}\}_s, \qquad (1)$$

где в случае повторяющихся индексов подразумевается суммирование по дискретным индексам и интегрирование по непрерывным (t, r).

B означает временное сопряжение

$$Q^{B}_{\alpha\beta\ldots}(t_1, t_2, \ldots) = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \ldots Q_{\alpha\beta\ldots}(-t_1, -t_2, \ldots),$$

$\varepsilon_\alpha = +1$ или -1 в зависимости от временной четности переменных $B_\alpha(t)$; фигурные скобки $\{\ldots\}_s$ означают симметризацию по всем свободным индексам, $Z_{1,234} = \dfrac{\delta^3 h_1}{\delta\langle J_2\rangle\,\delta\langle J_3\rangle\,\delta\langle J_4\rangle}$ — нелинейный импеданс системы, где $h(\langle J\rangle)$ — зависимость, обратная зависимости $\langle J\rangle_h$ от h; $E_{12,34}$ — диссипационно-неопределяемая функция, связанная с локальными свойствами флуктуаций, симметричная по первым двум и последним двум индексам и удовлетворяющая соотношению $E_{12,34} = E^{B}_{34,12}$.

2. Рассмотрим бесконечно длинную двухпроводную линию с нелинейными потерями в проводах, описываемую телеграфными уравнениями (для простоты считаем потери в среде линейными):

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -G_1 u - C\,\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial I}{\partial t} - R_1 I - \frac{1}{6}R_3 I^3 + \mathscr{E}_{\text{ст}}, \tag{2}$$

где $\mathscr{E}_{\text{ст}}$ — сторонняя внешняя распределенная ЭДС, рассчитанная на единицу длины, играет роль внешней силы, сопряженной внутреннему термодинамическому параметру $Q(x,t)$, производная от которого по времени совпадает с плотностью тока $I(x,t)$. Следовательно, линейная адмитансная функция $Y(\omega,k)$ (в спектральном представлении) определяется из уравнения $(\varkappa(\omega) - k^2)I = \mathscr{E}_{\text{ст}}$ и равна

$$Y(\omega,k) = (\varkappa(\omega) - k^2)^{-1},\quad \varkappa(\omega) = (R_1 + i\omega L)(G_1 + i\omega C). \tag{3}$$

Рассматривая нелинейные члены в (2), находим $Z_{1,234} = R_3\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ в спектральной форме, а поскольку функция $E_{12,34}$, согласно [3], определяется теми же микропроцессами в среде, что и $Z_{1,234}$, с теми же постоянными времени и расстояния, она должна иметь вид $E_{12,34} = c_0\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$, где c_0 — единственная диссипационно-неопределяемая постоянная. Подставляя выражения для $Z_{1,234}$ и $E_{12,34}$ вместе с (3) в (1), получаем

$$\begin{aligned}\langle I(\omega_1,k_1),\, I(\omega_2\, k_2),\, I(\omega_3,k_3),\, I(\omega_4,k_4)\rangle &= \\ = 4R_3\Big\{(\varkappa(\omega_1) - k_1^2)\prod_{l=2}^{4}(\varkappa^*(\omega_l) - k_l^2)\Big\}_s &+ \text{к. с.} + \\ + 6c_0\Big\{\prod_{l=1}^{2}(\varkappa(\omega_l) - k_l^2)\,(\varkappa^*(\omega_{l+2}) - k_{l+2}^2)\Big\}_s&,\end{aligned} \tag{4}$$

где * и к.с. означают комплексно-сопряженные члены.

3. Рассмотрим теперь отрезок двухпроводной линии длины l, замкнутый на одном конце и нагруженный на нелинейное сопротивление на другом.

Предполагая для простоты потери в линии отсутствующими, запишем для нее телеграфные уравнения $\dfrac{\partial I}{\partial x} = -C\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -L\dfrac{\partial I}{\partial t}$ с граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\quad I(l,t) = f[u(l,t) + \mathscr{E}_{\text{ст}}], \tag{5}$$

где $I = f(u)$ — характеристика нелинейного элемента, $\mathscr{E}_{\text{ст}}$ — внешнее напряжение, приложенное к нелинейному сопротивлению, выступает снова в роли внешней силы, сопряженной внутреннему термодинамическому параметру $Q(l,t)$, причем $Q(l,t)=I(l,t)$. Используя только первое граничное условие из (5), нетрудно получить [5], что

$$u(x,\ t)=F\left(t-\frac{x}{v}\right)-F\left(t+\frac{x}{v}\right),$$

$$I(x,\ t)=Z_0^{-1}\left[F\left(t-\frac{x}{v}\right)+F\left(t+\frac{x}{v}\right)\right], \tag{6}$$

где $Z_0=\sqrt{L/C}$ — волновое сопротивление линии, $v=1/\sqrt{LC}$ — скорость волны в линии.

Подставляя (6) во второе граничное условие (5), получим уравнение

$$F\left(t-\frac{T}{2}\right)+F\left(t+\frac{T}{2}\right)=Z_0f\left[F\left(t-\frac{T}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-F\left(t+\frac{T}{2}\right)+\mathscr{E}_{\text{ст}}(t)\right], \tag{7}$$

где $T/2=l/v$ — время прохождения волны от одного конца линии к другому.

Представляя характеристику нелинейного сопротивления $f(x)$ в виде $f(x)=g_1x+\frac{1}{6}g_3x^3+\ldots$ и используя (6)—(7), найдем

$$\left[1+g_1Z_0\,\mathrm{th}\left(\frac{T}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]I(l,\ t)=\mathscr{E}_{\text{ст}}(t),$$

откуда, переходя к спектральному представлению, получаем

$$Y(\omega)=\left[1+g_1Z_0\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega T}{2}\right]^{-1}. \tag{8}$$

Также из (6)—(7) находим, что $Z_{1,234}=-g^{-1}{}_1g_3\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)$ и, следовательно, как и в предыдущем случае, $E_{12,34}=c_0\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)$. Подставляя все это в (1), получаем

$$\langle I(l,\omega_1),\ I(l,\omega_2),\ I(l,\omega_3),\ I(l,\omega_4)\rangle=$$
$$=4g_1^{-1}g_3\{Y(\omega_1)Y^*(\omega_2)Y^*(\omega_3)Y^*(\omega_4)\}_s+\text{к. с.}+$$
$$+6c_0\{Y(\omega_1)Y(\omega_2)Y^*(\omega_3)Y^*(\omega_4)\}_s, \tag{9}$$

где $Y(\omega)$ определяется формулой (8).

Для определения флуктуаций тока в линии достаточно воспользоваться формулой

$$I(x,\omega)=I(l,\omega)\left[\cos\frac{\omega x}{v}\Big/\cos\frac{\omega l}{v}\right],$$

заменить $Y(\omega_k)$ в (9) на

$$Y(\omega_k)\left[\cos\frac{\omega_k x_k}{v}\Big/\cos\frac{\omega_k l}{v}\right],$$

а для определения флуктуаций напряжений — на

$$-Z_0Y(\omega_k)\left[\sin\frac{\omega_k x_k}{v}\Big/\cos\frac{\omega_k l}{v}\right].$$

В заключение автор приносит благодарность Р. Л. Стратоновичу за постановку задачи и обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1968. [2] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. [3] Стратонович Р. Л. ДАН СССР, 1980, 254, № 2, с. 338. [4] Толстопятенко А. В. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1981, 24, № 3, с. 312.

Поступила в редакцию
03.04.81

УДК 533.951

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ СХОДЯЩИМСЯ РЯДОМ В ДЛИННОВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ

Л. С. Кузьменков, П. А. Поляков, М. И. Ситнов, О. О. Трубачев

(кафедра теоретической физики)

Продольная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_l(k,\omega)$ релятивистской плазмы рассмотрена в работе [1] в связи с радиационным затуханием и дисперсией волн, а также более полно в работах [2, 3]. Ниже будет показано, что в области $z=\omega/kc>1$ оказывается возможным получить выражение для $\varepsilon_l(k,\omega)$ в виде ряда по степеням обратной температуры $\alpha=mc^2/\Theta$ и величины $\beta=(z^2-1)^{-1/2}$, причем этот ряд сходится равномерно для любых конечных α и β. Это обстоятельство дает возможность аппроксимировать $\varepsilon_l(k,\omega)$ частичной суммой ряда, а допущенную погрешность при этом оценить путем оценки остаточного члена.

Продольную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_l(k,\omega)$ релятивистской плазмы при $z>1$ и $z<-1$ удобно представить в виде [4]

$$\varepsilon_l(k,\omega)=1-z_p^2\beta^2\{\alpha(2K_0(\alpha)-zG)/2K_2(\alpha)+ +[zG+(z^2-1)\partial G/\partial z]/\alpha\beta^2K_2(\alpha)\}, \tag{1}$$

где введено обозначение

$$G=-2\beta z\int\limits_{\alpha}^{\infty}K_0(\xi)\sin\beta(\alpha-\xi)\,d\xi,\ z_p=\omega_p/kc, \tag{2}$$

$K_0(\alpha)$, $K_2(\alpha)$ — функции Макдональда, ω_p — плазменная частота; α и β изменяются в областях

$$0<\alpha\leqslant\alpha_0<\infty,\quad 0<\beta\leqslant\beta_0<\infty. \tag{3}$$

Выбор чисел α_0 и β_0 будет определять в дальнейшем область применимости приближенных формул для диэлектрической проницаемости.

Подынтегральные функции в (2) можно представить равномерно сходящимися рядами в области (3) и при $0\leqslant\xi\leqslant\alpha$. Тогда, как нетрудно показать, почленное интегрирование произведений этих рядов приводит к ряду, равномерно сходящемуся в области (3). Если же вместо рядов использовать их N-частичные суммы, то остаточный член ряда будет иметь порядок $\alpha^{2N+3}\ln 1/\alpha$. В результате интегрирования указанных N-частичных сумм получим

$$-G/2\beta z=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-n}\left[b_m\left(\ln\frac{2}{\alpha}+\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{2m+k+1}\right)+a_m\right]\times \times\alpha^{2m+2n+2}\beta^{2n+1}c_n\frac{(2m)!\,(2n+1)!}{(2m+2n+2)!}+\Delta_N(\alpha,\beta), \tag{4}$$