

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1968. [2] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. [3] Стратонович Р. Л. ДАН СССР, 1980, 254, № 2, с. 338. [4] Толстопятенко А. В. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1981, 24, № 3, с. 312.

Поступила в редакцию
03.04.81

УДК 533.951

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ СХОДЯЩИМСЯ РЯДОМ В ДЛИННОВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ

Л. С. Кузьменков, П. А. Поляков, М. И. Ситнов, О. О. Трубачев

(кафедра теоретической физики)

Продольная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_l(k, \omega)$ релятивистской плазмы рассмотрена в работе [1] в связи с радиационным затуханием и дисперсией волн, а также более полно в работах [2, 3]. Ниже будет показано, что в области $z \equiv \omega/kc > 1$ оказывается возможным получить выражение для $\epsilon_l(k, \omega)$ в виде ряда по степеням обратной температуры $\alpha = mc^2/\theta$ и величины $\beta = (z^2 - 1)^{-1/2}$, причем этот ряд сходится равномерно для любых конечных α и β . Это обстоятельство дает возможность аппроксимировать $\epsilon_l(k, \omega)$ частичной суммой ряда, а допустимую погрешность при этом оценить путем оценки остаточного члена.

Продольную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_l(k, \omega)$ релятивистской плазмы при $z > 1$ и $z < -1$ удобно представить в виде [4]

$$\epsilon_l(k, \omega) = 1 - z_p^2 \beta^2 \{ \alpha (2K_0(\alpha) - zG) / 2K_2(\alpha) + [zG + (z^2 - 1) \partial G / \partial z] / \alpha \beta^2 K_2(\alpha) \}, \quad (1)$$

где введено обозначение

$$G = -2\beta z \int_{\alpha}^{\infty} K_0(\xi) \sin \beta(\alpha - \xi) d\xi, \quad z_p = \omega_p/kc, \quad (2)$$

$K_0(\alpha)$, $K_2(\alpha)$ — функции Макдональда, ω_p — плазменная частота; α и β изменяются в областях

$$0 < \alpha \leq \alpha_0 < \infty, \quad 0 < \beta \leq \beta_0 < \infty. \quad (3)$$

Выбор чисел α_0 и β_0 будет определять в дальнейшем область применимости приближенных формул для диэлектрической проницаемости.

Подынтегральные функции в (2) можно представить равномерно сходящимися рядами в области (3) и при $0 \leq \xi \leq \alpha$. Тогда, как нетрудно показать, почленное интегрирование произведений этих рядов приводит к ряду, равномерно сходящемуся в области (3). Если же вместо рядов использовать их N -частичные суммы, то остаточный член ряда будет иметь порядок $\alpha^{2N+3} \ln 1/\alpha$. В результате интегрирования указанных N -частичных сумм получим

$$-G/2\beta z = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \left[b_m \left(\ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2m+k+1} \right) + a_m \right] \times \\ \times \alpha^{2m+2n+2} \beta^{2n+1} c_n \frac{(2m)! (2n+1)!}{(2m+2n+2)!} + \Delta_N(\alpha, \beta), \quad (4)$$

где

$$|\Delta_N| \leq M_N \ln \frac{1}{\alpha} \alpha^{2N+3}; \quad b_n = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2}; \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!};$$

$$a_n = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - C \right) \text{ при } n \geq 0 \text{ и } a_0 = -C \text{ при } n=0;$$

C — постоянная Эйлера, M_N зависит только от N , α_0 , β_0 . При $\beta \geq 1/2$ общий член ряда (4) оценивается формулой

$$\text{const} \cdot \alpha (\alpha\beta)^{2N+1} / (2N+1) (2N+2) ((N-1)!)^2, \quad (5)$$

а при $0 < \beta < 1/2$ — формулой

$$\text{const} \cdot \alpha^{2N+2} \beta / (2N+1) (2N+2) ((N-1)!)^2, \quad (6)$$

которые свидетельствуют о быстрой сходимости ряда и при не очень малых α и β . Ряд по степеням β , представляющий G , имеет бесконечный радиус сходимости, и его можно почленно дифференцировать. В результате подстановки (4) в (1) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_p^2}{\alpha k^2 c^2 K_2(\alpha)} & \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \left[b_m \left(\ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2m+1+k} \right) + a_m \right] \times \right. \\ & \times (2c_n/\beta - 2z^2 \beta d_n - z^2 \alpha^2 \beta^3) \frac{(2m)! (2n+1)!}{(2m+2n+2)!} \alpha^{2m+2n+2} \beta^{2n+1} - \\ & - \pi z \left(1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} + \frac{\alpha \beta}{\pi} \ln \frac{z-1}{z+1} \right) \sum_{n=0}^N c_n (\alpha\beta)^{2n+1} + \\ & + z \left[\left(\frac{\alpha^2 \beta^2}{2} - 1 \right) \ln \frac{z-1}{z+1} - \frac{2}{z} + \pi \alpha \beta \right] \cdot \sum_{n=0}^{N+1} d_n (\alpha\beta)^{2n} + \\ & \left. + \alpha^2 \beta^2 \ln \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^N \ln \alpha^{2n} + \alpha^2 \beta^2 \sum_{n=0}^N a_n \alpha^{2n} + \tilde{\Delta}^N \right\}; \quad (7) \\ d_n = (-1)^n / (2n)!. \end{aligned}$$

Здесь Σ' означает суммирование только до порядка $(2N+2)$ по α $\tilde{\Delta}^N \sim \alpha^{2N+3} \ln 1/\alpha$. При $N \rightarrow \infty$ мы имеем ряд с бесконечным радиусом сходимости по α и β и равномерно сходящийся в области (3). Общий член такого ряда оценивается аналогично (5) и (6) и свидетельствует о быстрой сходимости ряда при не слишком больших α и β . В частности, для ультрарелятивистских температур и $\beta_0 \sim 1$ высокая точность обеспечивается при $N=2$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_p^2}{\alpha k^2 c^2 K_2(\alpha)} & \left\{ -2 - z \ln \frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{2} (\alpha\beta)^2 + \frac{z\pi}{6} (\alpha\beta)^3 - \right. \\ & - \frac{1}{8} (\alpha\beta)^4 z \ln \frac{z-1}{z+1} + (\alpha\beta)^4 z^2 \left(\frac{C}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{2}{\alpha} - \frac{29}{72} \right) + \\ & \left. + (\alpha\beta)^4 \left(\ln \frac{2}{\alpha} - C + \frac{13}{12} \right) + \alpha^4 \beta^2 \left(\frac{53}{288} - \frac{5C}{24} + \frac{5 \ln \frac{2}{\alpha}}{24} \right) \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Если в фигурной скобке (8) оставить только первые два слагаемых ($N=0$), мы получим результат Силина [3]. Отклонение (8) от точного значения ϵ_l при $z \rightarrow 1+0$ стремится к бесконечности. Фиксированная точность в этом случае может быть обеспечена лишь за счет возрастания N . В этом состоит причина ошибочности предельного перехода, сделанного Силиным [3] и воспроизведенного в [5].

Из формул (7) и (8) нетрансцендентное дисперсионное соотношение может быть получено методом итераций. Так, при учете квадратичных поправок по α и $3k^2c^2/\omega_p^2\alpha$

$$\omega^2 \cong \frac{\omega_p^2 \alpha}{3} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{3k^2c^2}{\omega_p^2 \alpha} \right) + \dots \right] \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\epsilon_l} \right). \quad (9)$$

Разложение (9) может быть продолжено. Вследствие равномерной сходимости разложения для ϵ_l и выполнения условий сходимости метода итераций решения дисперсионного уравнения это разложение даст сходящийся в длинноволновой области ряд. Аналогичный ряд по степеням $1/\alpha$ и $1/\alpha z^2$ является расходящимся асимптотическим разложением.

Таким образом, получено представление диэлектрической проницаемости релятивистской плазмы сходящимся рядом в длинноволновой области и как следствие — корректная аппроксимация $\epsilon_l(k, \omega)$ при высоких температурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кузьменков Л. С. ДАН СССР, 1978, 241, № 2, с. 322. [2] Mikhailovskii A. V. Plasma Phys., 1980, 22, p. 133. [3] Силин В. П. ЖЭТФ, 1960, 38, с. 1577. [4] Godfrey B. B., Newberger B. S., Taggart K. A. IEEE Trans. Plasma Sci., 1975, 3, N 2, p. 68. [5] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М., 1979, с. 170.

Поступила в редакцию
08.06.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 3

УДК 621.378.001

ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В КРИСТАЛЛАХ КЛАССОВ $mm2$ и $4mm$

В. А. Дианова, Е. Р. Мустель

(кафедра физики колебаний)

В системах управления лазерным излучением (модуляторы, дефлекторы, пространственно-временные модуляторы и т. д.), основанных на линейном электрооптическом эффекте, желательно иметь минимальное управляющее (полуволновое) напряжение. Для этого, как правило, необходимо использовать кристаллы косых срезов [1, 2]. Направления экстремального электрооптического эффекта для таких распространённых кристаллов, как $LiNbO_3$ и KDP , приведены в ряде работ [1, 3].

Представляет интерес рассчитать оптимальные направления и соответствующие им полуволновые напряжения для кристаллов $NaBa_2Nb_5O_{15}$ (класс $mm2$) и $Ba_{0,25}Sr_{0,75}Nb_2O_6$ (класс $4mm$), обладающих достаточно высокими электрооптическими коэффициентами. Для нахождения направлений максимального электрооптического эффекта использован метод, развитый в работе [4]. Расчет проведен только для