УДК 517:948:35

О КВАЗИОПТИМАЛЬНОМ ПРЕРЫВАНИИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

В. Б. Гласко, Ю. А. Криксин

(кафедра математики)

1. Регуляризирующие итерационные процессы [1] широко применяются для решения многих обратных задач математической физики. Номер итерации n в этом случае играет роль параметра регуляризации. Возникает проблема согласования момента прерывания процесса с погрешностью входных данных и вычислений. Одним из способов такого согласования может служить так называемый квазиоптимальный [2, 3, 4, 6], основанный на выборе наименьшего элемента из некоторой числовой последовательности $\{\mu_n\}$, называемой дискретной квазиоптимальной нормой погрешности. Задание последовательности $\{\mu_n\}$ во многом определяется спецификой задачи и алгоритма, в особенности если задача является нелинейной. Однако если задача линейная, т. е. сформулирована в виде некоторого некорректного линейного уравнения 1-го рода

$$Az=u, \tag{1}$$

где $z\in H_1$, $u\in H_2$; H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $A:H_1\to H_2$ — линейный ограниченный оператор, то, избрав определенный итерационный процесс, мы можем указать конкретный вид последовательности $\{\mu_n\}$.

Преимуществом квазиоптимального выбора параметра регуляризации является то, что не требуется априорная информация о величине погрешности входных данных и вычислений.

Как и в [4], мы будем основываться на статистической природе квазиоптимального приближения.

Целью работы является обоснование регуляризирующих свойств квазиоптимального выбора в применении к регуляризирующему итерационному процессу, изученному в [1]. Этот процесс задается соотношением

$$\begin{gathered} z_{n+1}=(C+\alpha E)^{-1}(b+\alpha_n z_n), \\ C=A^*A, \qquad b=A^*u, \end{gathered} \tag{2}$$

A^* — сопряженный к A оператор.

2. В работе [1] доказана сходимость процесса (2) в случае отсутствия погрешности в правой части (1) и ошибок округления на каждом шаге процесса в предположении разрешимости (1). Процесс сходится к нормальному решению (1), и установлена оценка

$$\|\tilde{z}_n-\bar{z}\|\leqslant M_0(n)+n\delta/\zeta, \tag{3}$$

где

$$M_0(n)\to 0, \qquad n\to\infty,$$

$$\|A^*\tilde{u}-A^*u\|=\|\tilde{b}-b\|\leqslant\delta,$$

$$\zeta=\inf_n \alpha_n,\ \alpha_n<L,\ L>0,$$

из которой следуют регуляризирующие свойства процесса (2).

Неравенство $\|\tilde{b}-b\|\leqslant\delta$ понимается в том же смысле, что и в [4]. В дальнейшем, не ограничивая общности рассуждений, положим $\alpha_n=\alpha=\text{const}>0$.

Для всех линейных задач, решаемых с помощью процесса (2), в качестве квазиоптимальной нормы единообразным способом может быть выбрана величина

$$\mu_n=n\|z_n-z_{n-1}\|\equiv n\|y_n\|,$$
$$y_n=z_n-z_{n-1}, \tag{4}$$

установлением свойств которой мы и займемся. Через $\tilde{\mu}_n$, $\tilde{z}_n$, $\tilde{y}_n$ будут обозначаться величины, соответствующие μ_n, z_n, y_n, если правая часть (1) предполагается заданной с некоторой погрешностью и присутствуют ошибки округлений. Введем также величины

$$\Delta z_0=\tilde{z}-z_0,\qquad \Delta y_n=\tilde{y}_n-y_n,\qquad \Delta z_n=\tilde{z}_n-z_n,$$
$$\Delta b=\tilde{b}-b.$$

Как следует из [1, 5], C является неотрицательно определенным самосопряженным оператором, ему может быть поставлено в соответствие некоторое разложение единицы $\{E_t\}$ [5]. Из рекуррентной формулы (2) путем несложных преобразований устанавливаются следующие «рабочие» соотношения:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= R_n^{(1)}(\alpha, C)\, b\\ \Delta x_n &= R_n^{(1)}(\alpha, C)\,\Delta b\\ \Delta y_n &= R_n^{(2)}(\alpha, C)\,\Delta b\\ y_n &= R_n^{(3)}(\alpha, C)\,\Delta z_0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где операторные функции от C $R^{(j)}(\alpha, C)$ в спектральном представлении имеют вид

$$\left.\begin{aligned} R_n^{(1)}(\alpha, C) &= \int_0^{\|C\|}\frac{1}{t}\left(1-\left(\frac{\alpha}{t+\alpha}\right)^n\right)dE_t\\ R_n^{(2)}(\alpha, C) &= \int_0^{\|C\|}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{t+\alpha}\right)^n dE_t\\ R_n^{(3)}(\alpha, C) &= \int_0^{\|C\|}\frac{t}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{t+\alpha}\right)^n dE_t \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Используя представления (5)—(6), получим некоторые детерминированные свойства квазиоптимальной нормы (4).

Лемма 1. Пусть $\mu_n=n\|y_n\|$, тогда

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$;

2. $\forall N>0\ \lim\limits_{\delta\to 0}\ \sup\limits_{n<N}|\tilde{\mu}_n-\mu_n|=0$.

Доказательство. Из (5), (6) получаем

$$\mu_n^2 = \frac{1}{\alpha^2} \int\limits_0^{\|C\|} g_n(t)\, d(E_t \Delta z_0, \Delta z_0),$$

где

$$g_n(t) = n^2 t^2 \left(\frac{\alpha}{t+\alpha}\right)^{2n}.$$

На множестве $[0, \|C\|]$ функции $g_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, обладают следующими свойствами:

1) $\sup\limits_{n, 0<t\leqslant\|C\|} g_n(t) = \frac{\alpha^2}{l^2}$, где $l = \text{const}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\sigma\leqslant t\leqslant\|C\|} g_n(t) = 0, \quad \forall \sigma > 0$;

3) $g_n(t) > 0$.

Теперь, выбирая произвольное $\varepsilon > 0$ (ε зависит от ε') так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_0^{\varepsilon'} d\,(E_t \Delta z_0, \Delta z_0) < \frac{\varepsilon^2 l^2}{2},$$

и выбирая $N(\varepsilon, \varepsilon')$ таким образом, чтобы всюду на сегменте $[\varepsilon', \|C\|]$ было справедливо

$$g_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2\|\Delta z_0\|^2} \quad \text{при } n > N(\varepsilon, \varepsilon'),$$

получим, что $\mu_n < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon, \varepsilon'(\varepsilon))$. Это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0.$$

Доказательство второго утверждения леммы с очевидностью следует из оценки (3).

Следствие. При достаточно малых δ найдется такая последовательность значений номеров $n_1, n_1+1, \ldots, n_1+k$; $k \geqslant 1$, что

$$\tilde{\mu}_{n_1} > \tilde{\mu}_{n_1+1} > \ldots > \tilde{\mu}_{n_1+k}.$$

Выберем такую последовательность, ближайшую к нулю, и через n_0 обозначим ее первый член.

Определение 1. Квазиоптимальным значением номера итерации $n = n_\delta^{\text{ко}}$ назовем максимальное значение n, для которого

$$\mu_{n_\delta^{\text{ко}}} = \mu_\delta^{\text{ко}} = \inf_{n\geqslant n_0} \tilde{\mu}_n. \tag{7}$$

В частности, может быть $n_\delta^{\text{ко}} = \infty$. В этом случае при отсутствии погрешности квазиоптимальное приближение совпадает с точным решением задачи (1).

Чтобы изучить регуляризирующие свойства введенной квазиоптимальной нормы, так же как и в работе [4], введем в рассмотрение аналогичную модель погрешности, а именно: будем рассматривать Δb как случайный вектор, а функцию

$$g(t) = (E_t \Delta b, \Delta b)/\|\Delta b\|^2$$

как случайную функцию.

Определение 2. Назовем распределение погрешностей принадлежащим классу Ψ, если для любого p, $0<p<1$, существуют константы $\eta(p)>0$, $M_s(p)>0$, $s=1, 2$, такие, что при $t\in(0, \eta(p))$ с вероятностью p справедливы неравенства

$$M_1(p)\psi(t)\leqslant g(t)\leqslant M_2(p)\psi(t), \tag{8}$$

где $\psi(t)>0$ — некоторая детерминированная функция.

В нашей модели мы положим $\psi(t)=t^\nu$, где $\nu=\text{const}$, $0\leqslant\nu<2$.

Аналогично [4] оказывается справедливой

Лемма 2. В классе моделей $\Psi(\psi(t)=t^\nu)$ при любом $\delta>0$ вероятность $P(\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\mu}_n=\infty)=1$

и при $n=n_\delta^{\text{ко}}$ с вероятностью p справедливо неравенство

$$\|\tilde{z}_n-\bar{z}\|_{H_1}\leqslant\xi(p)\tilde{\mu}_n, \tag{9}$$

где $\xi(p)>0$ не зависит от δ.

Доказательство этого факта, включая (9), связано с достаточно тонкими минорантными и мажорантными оценками интегралов, следующих из представлений (6).

3. Установим эффективность квазиоптимального выбора $n(\delta)$.

Теорема 1. При принятии изложенной выше модели для любой частной реализации погрешностей имеют место равенства

$$P(\lim_{\delta\to0}\tilde{\mu}_\delta^{\text{ко}}=0)=1,$$

$$P(\lim_{\delta\to0}n_\delta^{\text{ко}}=\infty)=1.$$

Доказательство теоремы 1 проводится от противного с использованием определения 1 и результатов леммы 1.

Основным результатом работы является

Теорема 2. Пусть $\{\delta_k\}$ — бесконечно малая последовательность, такая, что для задачи (1) $\|\Delta b_k\|\leqslant\delta_k$, а распределение погрешностей принадлежит классу Ψ. Тогда $\|z_{n_{\delta_k}^{\text{ко}}}-\bar{z}\|$ сходится по вероятности к нулю при $k\to\infty$.

Таким образом, для рассматриваемого класса задач установлено существование моделей распределения погрешностей, при принятии которых алгоритм (2) с квазиоптимальным прерыванием итерационного процесса является стохастически регуляризирующим.

Авторы выражают благодарность акад. А. Н. Тихонову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Оганесян С. М., Старостенко В. И. ДАН СССР, 1978, 23, № 2, с. 277. [2] Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Журн. выч. матем. и матем. физики, 1965, 5, № 3, с. 463. [3] Леонов А. С. ДАН СССР, 1975, 240, № 1, с. 18. [4] Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Криксин Ю. А. ДАН СССР, 1979, 24, № 3, с. 531. [5] Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Клейна. М.: Наука, 1972. [6] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
22.09.80