УДК 530.145

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УСТРАНЕНИЯ ИНФРАКРАСНЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В. Ю. Борю, В. А. Ильин, Д. А. Славнов

(кафедра физики высоких энергий)

Известно [1, 2], что инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике устраняются путем суммирования по мягким фотонам в конечном состоянии. Оказывается, что это суммирование можно полностью включить в операторы числа регистрируемых частиц. Для простоты рассмотрим рассеяние электрона на классическом источнике. Полученные формулы легко обобщаются на случай произвольного процесса рассеяния в квантовой электродинамике.

Дифференциальное сечение рассеяния электрона с испусканием мягких фотонов имеет вид

$$d\sigma_n = \frac{(2\pi)^3}{vT} \left| \langle 0 | a^-_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) \ldots a^-_{\lambda_n}(\mathbf{k}_n) b^-_\beta(\mathbf{p}') F b^{*+}_\alpha(\mathbf{p}) | 0 \rangle \right|^2 d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n d\mathbf{p}',$$

где T — время взаимодействия, $v = |\mathbf{p}|/p^0$ — начальная скорость электрона, $a^\pm_\lambda(\mathbf{k})$, $b^\pm_\alpha(\mathbf{p})$ — операторы рождения и уничтожения фотона и электрона, $iF = 1 - S$. В дальнейшем рассмотрим случай, когда $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$; при этом будем заменять F на S.

Суммирование по мягким фотонам в конечном состоянии с учетом разрешающей способности прибора Δ, регистрирующего электроны после рассеяния, приводит к формуле для инклюзивного сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^3}{VT} \sum_{\substack{n=0 \\ \lambda=1,2}}^{\infty} \int\limits_{p_0-\Delta}^{p_0} dp_0' \, p_0' \, |\mathbf{p}'| \times$$

$$\times \int \frac{d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n}{n!} \langle 0 | b^-_\alpha(\mathbf{p}) S^+ b^{*+}_\beta(\mathbf{p}') a^+_{\lambda_n}(\mathbf{k}_n) \ldots a^+_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) | 0 \rangle \times$$

$$\times \langle 0 | a^-_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) \ldots a^-_{\lambda_n}(\mathbf{k}_n) b^-_\beta(\mathbf{p}') S b^{*+}_\alpha(\mathbf{p}) | 0 \rangle. \quad (1)$$

Разрешающую способность прибора естественно считать достаточно высокой ($\Delta \ll m$, где m — масса электрона). Вследствие закона сохранения энергии суммировать в (1) можно не только по фотонам, но и по любому количеству электронов в конечном состоянии. Тогда, воспользовавшись условием полноты в фоковском пространстве фотонов и электронов, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^3}{vT} \int\limits_{p_0-\Delta}^{p_0} dp_0' \, p_0' \, |\mathbf{p}'| \times$$

$$\times \langle 0 | b^-_\alpha(\mathbf{p}) S^+ b^{*+}_\beta(\mathbf{p}') \, b^-_\beta(\mathbf{p}') S b^{*+}_\alpha(\mathbf{p}) | 0 \rangle. \quad (2)$$

Заметим, что в (2) появился оператор числа электронов в конечном состоянии:

$$N^{\text{out}}_\beta(p_0, \Delta) = \int\limits_{p_0-\Delta}^{p_0} dp_0' \, p_0' \, |\mathbf{p}'| \, S^+ b^{*+}_\beta(\mathbf{p}') b^-_\beta(\mathbf{p}') S.$$

Введем оператор проектирования на состояния с энергией не больше данной, действующей в фоковском пространстве. Тогда (2) легко переписать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^3}{vT}\operatorname{tr}_{\text{in}}(N_\beta^{\text{out}}(p_0, \Delta)\, N_\alpha^{\text{in}}(p_0)\, P(p_0)), \tag{3}$$

где

$$N_\alpha^{\text{in}}(p_0) = b_\alpha^{*+}(\mathbf{p})\, b_\alpha^{-}(\mathbf{p}),$$

а $\operatorname{tr}_{\text{in}}$ — след в фоковском пространстве. Эквивалентность (2) и (3) следует непосредственно из определения $\operatorname{tr}_{\text{in}}$. Эта формула легко обобщается для любого процесса в квантовой электродинамике. Например, для комптон-эффекта:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{el}}\, d\Omega_{\text{ph}}} = \frac{(2\pi)^6}{vVT}\operatorname{tr}_{\text{in}}(N_\beta^{\text{out}}(\mathbf{p}_0, \Delta)\, n_\lambda^{\text{out}}(q_0, \Delta') \times$$

$$\times N_\alpha^{\text{in}}(t_0)\, n_\xi^{\text{in}}(k_0)\, P(k_0 + t_0)), \tag{4}$$

где V, T — объем и время взаимодействия: $v = |\mathbf{k}|/k_0 = 1$ в системе отсчета покоящегося электрона; $N_\beta^{\text{out}}(p_0, \Delta)$, $N_\alpha^{\text{in}}(t_0)$ — введенные ранее операторы числа электронов; $n_\lambda^{\text{out}}(q_0, \Delta), n_\xi^{\text{in}}(k_0)$ — аналогичные операторы для фотонов; $P(k_0+t_0)$ — оператор проектирования на состояния с энергией не больше k_0+t_0; $d\Omega_{\text{Ph}}$, $d\Omega_{\text{el}}$ — телесные углы фотона и электрона.

Формулы (3) и (4) имеют простую физическую интерпретацию. Они выражают тот факт, что при заданном состоянии, которое фиксируется конфигурацией потока падающих частиц, сечение $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')$ определяется средним числом частиц, рассеянных в данный телесный угол. Последнее равно математическому ожиданию оператора $N_\beta^{\text{out}}(p_0, \Delta)$ по этому состоянию.

Известно, что физическая система характеризуется своими наблюдаемыми и состоянием (линейным функционалом на алгебре наблюдаемых), в котором она находится. Для того чтобы задать этот функционал, заметим, что (3) можно переписать в виде

$$\operatorname{tr}_{\text{in}}(AD) = \frac{1}{T}\int \operatorname{tr}_{\text{in}}(AN_\alpha^{\text{in}}(k_0)\, f(k_0)\, P(k_0))\, dk_0,$$

где

$$D = \frac{1}{T}\int N_\alpha^{\text{in}}(p_0)\, P(p_0)\, dp_0\, f(p_0)$$

оператор в фоковском пространстве, который играет роль оператора матрицы плотности; $f(k_0)$ — функция, характеризующая систему в начальном состоянии. В рассматриваемом случае $f(k_0) = \delta(p_0 - k_0)$. Тогда состояние системы задается функционалом

$$F_f(A) = \operatorname{tr}_{\text{in}}(A, D)$$

и сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^3}{v}\operatorname{tr}_{\text{in}}(N_\beta^{\text{out}}(p_0, \Delta)\, D). \tag{5}$$

Заметим, что $\operatorname{tr}_{\text{in}}$ вычисляется в фоковском пространстве; величины, входящие в (5), имеют ясный физический смысл и свободны от инфракрасных расходимостей. Нетрудно заметить, что (5) имеет более общий характер, чем формула, использующая S-матрицу, так как может быть осмыслена вне ее рамок. Выражение для сечения рассеяния имеет смысл даже тогда, когда S-матрицы не существует (хотя вывод формулы и опирался на понятие S-матрицы в фоковском пространстве), и, следовательно, может быть принято за исходное.

Таким образом, получена компактная формула, в которой в явном виде учтены идеи Блоха — Нордсика о суммировании по мягким фотонам в конечном состоянии и которая позволяет устранить инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике. Отметим, что в полученных формулах сечение выражается через $N_{\beta}^{\text{out}}(p_0, \Delta)$, $N_{\alpha}^{\text{in}}(p_0)$ — операторы числа электронов в конечном и начальном состоянии и $P(p_0)$ — оператор проектирования на состояния с энергией не меньше данной. Эти операторы имеют смысл и вне рамок теории возмущений. И поскольку сечение есть значение некоторого функционала tr_{in} на произведении этих операторов, то можно надеяться, что полученные формулы будут базой для расчета сечений вне рамок теории возмущений. Заметим, что операторы могут быть выражены как в in-, так и в out-представлении. При наличии в системе безмассовых частиц эти представления не эквивалентны [3], т. е. операторы in и out не связаны унитарным преобразованием. Попытка формально ввести такое преобразование (S-матрицу) приводит к появлению инфракрасных расходимостей при расчетах. Развитый в статье формализм, очевидно, позволяет эффективно учесть неэквивалентность in- и out-представлений и, следовательно, избежать появления инфракрасных расходимостей при вычислении по формулам (3), (4) и (5).

Исследуем теперь зависимость инклюзивного сечения рассеяния от малых вариаций начальных состояний. В любом эксперименте присутствуют фоновые фотоны, которые прибор не в состоянии зарегистрировать; они создаются всевозможными классическими токами, находящимися далеко от места эксперимента. Покажем, что их влияние мало сказывается на известной процедуре расчета инклюзивных сечений. Для этого необходимо понять, как под влиянием классических токов изменится вакуум и какое изменение считать малым.

Известно [3], что при рассеянии классическими токами получаются когерентные состояния, которые характеризуются следующим образом:

$$|f\rangle = U(f)\,|0\rangle;\quad U(f) = \exp\left((a^*, f) - (f^*, a)\right),$$

$$(a^*, f) = \int f^{\mu}(\mathbf{k})\, a_{\mu}^{+}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k},\quad (f^*, a) = \int f^{*\mu}(\mathbf{k})\, a_{\mu}^{-}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

$$[a_{\mu}^{-}(\mathbf{k}),\, a_{\nu}^{+}(\mathbf{k}')] = g_{\mu\nu}\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Когерентные состояния имеют ясный физический смысл. Если оператор вектор-потенциала равен

$$A_{\mu}(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^{3/2}\,(2k_0)^{1/2}}\,[a_{\mu}^{-}(\mathbf{k})\, e^{ikx} + a_{\mu}^{+}(\mathbf{k})\, e^{-ikx}],$$

то его среднее значение на $|f\rangle$

$$\langle f\,|\,A_{\mu}(x)\,|\,f\rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^{3/2}\,(2k_0)^{1/2}}\,[f_{\mu}(\mathbf{k})\, e^{ikx} + f_{\mu}^{*}(\mathbf{k})\, e^{-ikx}],$$

т. е. $f_{\mu}(\mathbf{k})$ задает среднее значение вектор-потенциала в данном состоянии. Будем считать возмущение малым, если прибор, регистрирующий фотоны в начальном состоянии и имеющий разрешающую способность

$\Delta_0 > \Delta$, не в состоянии регистрировать это возмущение. Это означает, что в начальном состоянии нет фотонов с энергией больше Δ, т. е. $f_\mu(\mathbf{k})=0$ при $k_0>\Delta$. Разумно предположить, что полная энергия фона не превышает конечной величины

$$E_{\mathrm{ph}} = \langle f \,|\int a_\mu^+(\mathbf{k})\, k_0\, a_\mu^-(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\,|\, f\rangle = \int k_0 f^{*\mu}(\mathbf{k})\, f_\mu(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} < \infty. \qquad (6)$$

Покажем, что такое возмущение мало влияет на инклюзивное сечение и его влияние исчезает при $\Delta \to 0$, т. е. необходимо показать, что реально измеряемое сечение, пропорциональное величине

$$J = \langle f\,|\, b_\alpha^-(\mathbf{p})\; N_\beta^{\mathrm{out}}(p_0, \Delta)\; b_\alpha^{*+}(\mathbf{p})\,|\, f\rangle, \qquad (7)$$

и вычисляемое сечение

$$J_0 = \langle 0\,|\, b_\alpha^-(\mathbf{p})\; N_\beta^{\mathrm{out}}(p_0, \Delta)\; b_\alpha^{*+}(\mathbf{p})\,|\,0\rangle$$

мало отличается, т. е.

$$J = J_0 + O(\Delta).$$

Для вычисления воспользуемся тем, что внутренние инфракрасные расходимости в матричных элементах M_{fi} факторизуются [2] в экспоненциальный множитель

$$M_{fi} = \exp(\alpha b)\,\tilde{M}_{fi},$$

где $\tilde{M}_{fi}$ не содержит инфракрасных расходимостей, а

$$\alpha B = \int \frac{d^3k}{4(2\pi)^3 k_0}\, e^2 \left(\sum_j \frac{\theta^j p^j_{\mu j}}{(p^j k)}\right)^2$$

расходится на нижнем пределе. Здесь суммирование ведется по всем заряженным частицам с импульсом p^j и $\theta^j = 1\,(-1)$ для каждой из них в конечном (начальном) состоянии. В [2] также показано, что матричный элемент, соответствующий испусканию и поглощению мягких фотонов, имеет вид

$$\rho_n(\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n) = \sum_{\mathrm{perm}} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^m}{r!\,(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} d_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)\, \xi_{n-r}(\mathbf{k}_{r+1} \ldots \mathbf{k}_n),$$

где $\xi_n(\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n)$ — симметричная функция, расходящаяся не быстрее $\ln k_0$ при $k \to 0$, m — число поглощенных фотонов,

$$d_{\mu_i}(\mathbf{k}_i) = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\,(2k_0)^{1/2}} \sum_j \frac{\theta^j p^j_{\mu i}}{(p^j k_i)}.$$

Тогда после довольно громоздкого расчета комбинаторных множителей инфракрасно расходящиеся члены и члены, зависящие от (f^*, d) и (f, d), факторизуются в экспоненциальный множитель и (7) можно представить в виде

$$J = \exp\left(2\alpha B - 2\alpha B - (f^*, d) + (f^*, d) - (f, d) + (f, d)\right) \sum_{\substack{i, i'=0 \\ j, j'=0}}^{\infty} m_{ii'}^{jj'}, \qquad (8)$$

где i, i', j, j' — количество фотонов, появляющихся при разложении $|f\rangle$ в ряд в формуле (7) в бра- и кэт-состояниях. При этом $m_{00}^{00} = J_0$, а в $m_{ii'}^{jj'}$ зависимость от f входит в виде

$$\int f_\mu(\mathbf{k}) \ldots \xi(\ldots \mathbf{k} \ldots) d\mathbf{k},$$

т. е. не сильнее $\int f_\mu(\mathbf{k}) \ln k_0 d\mathbf{k}$. Все полюсные члены вида

$$\int f_\mu(k) d^\mu(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = (f, d), \quad \int f_\mu^*(k) d^\mu(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = (f^*, d),$$

которые расходятся при $\Delta \to 0$ и могли бы дать неадекватность процедуры расчета инклюзивных сечений, сокращаются (8).

Таким образом, нам необходимо оценить $A = \sum\limits_{\substack{i, i' \\ j, j'}} m_{ii'}^{jj'}$ при $i, i', j, j' \neq 0$ в данном порядке теории возмущений. Как показывают вычисления,

$$|A| < C \int f_\mu(\mathbf{k}) \ln k_0 \, d\mathbf{k},$$

где C — константа, появляющаяся при разложении S-матрицы в ряд теории возмущений. Тогда

$$\int \sqrt{k_0} \, f_\mu(\mathbf{k}) \frac{\ln k_0}{\sqrt{k_0}} d\mathbf{k} \leqslant$$

$$\leqslant \int f_\mu^*(\mathbf{k}) f^\mu(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k} \cdot k_0 \int\limits_0^\Delta \frac{\ln^2 k_0}{k_0} d\mathbf{k} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi E_{\text{ph}} \left(\frac{\Delta^2}{2} \ln^2 \Delta - \frac{\Delta^2}{2} \ln \Delta + \frac{\Delta^2}{4} \right) = O(\Delta).$$

Здесь мы воспользовались условием (6). Таким образом, мы доказали, что

$$J = J_0 + O(\Delta).$$

А это значит, что малые изменения начальных состояний мало влияют на процедуру расчета инклюзивных сечений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bloch F., Nordsieck A. Phys. Rev., 1937, 52, p. 54. [2] Yennie D. R., Frautchi S. C., Suura H. Ann. of Phys. (N. Y.), 1961, 13, p. 379. [3] Kibble J. J. Math. Phys., 1968, 9, p. 315.

Поступила в редакцию
13.10.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 537.862

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. И. Григорьев

(кафедра квантовой теории)

Описание электромагнитного поля при учете гравитации требует четырех тензоров второго ранга.

Первый из них, ковариантный тензор F_{ik}, описывает усредненное поле, порождаемое всеми зарядами и токами, включая микроскопиче-