а в $m_{ii'}^{jj'}$ зависимость от f входит в виде

$$\int f_\mu(\mathbf{k}) \ldots \xi(\ldots \mathbf{k} \ldots) d\mathbf{k},$$

т. е. не сильнее $\int f_\mu(\mathbf{k}) \ln k_0 d\mathbf{k}$. Все полюсные члены вида

$$\int f_\mu(k) d^\mu(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = (f, d), \quad \int f_\mu^*(k) d^\mu(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = (f^*, d),$$

которые расходятся при $\Delta \to 0$ и могли бы дать неадекватность процедуры расчета инклюзивных сечений, сокращаются (8).

Таким образом, нам необходимо оценить $A = \sum_{\substack{i, i' \\ j, j'}} m_{ii'}^{jj'}$ при $i, i', j, j' \neq 0$ в данном порядке теории возмущений. Как показывают вычисления,

$$|A| < C \int f_\mu(\mathbf{k}) \ln k_0 \, d\mathbf{k},$$

где C — константа, появляющаяся при разложении S-матрицы в ряд теории возмущений. Тогда

$$\int \sqrt{k_0}\, f_\mu(\mathbf{k}) \frac{\ln k_0}{\sqrt{k_0}} d\mathbf{k} \leqslant$$

$$\leqslant \int f_\mu^*(\mathbf{k}) f^\mu(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k} \cdot k_0 \int\limits_0^\Delta \frac{\ln^2 k_0}{k_0} d\mathbf{k} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi E_{\text{ph}} \left(\frac{\Delta^2}{2} \ln^2 \Delta - \frac{\Delta^2}{2} \ln \Delta + \frac{\Delta^2}{4} \right) = O(\Delta).$$

Здесь мы воспользовались условием (6). Таким образом, мы доказали, что

$$J = J_0 + O(\Delta).$$

А это значит, что малые изменения начальных состояний мало влияют на процедуру расчета инклюзивных сечений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bloch F., Nordsieck A. Phys. Rev., 1937, 52, p. 54. [2] Yennie D. R., Frautchi S. C., Suura H. Ann. of Phys. (N. Y.), 1961, 13, p. 379. [3] Kibble J. J. Math. Phys., 1968, 9, p. 315.

Поступила в редакцию
13.10.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 537.862

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. И. Григорьев

(кафедра квантовой теории)

Описание электромагнитного поля при учете гравитации требует четырех тензоров второго ранга.

Первый из них, ковариантный тензор F_{ik}, описывает усредненное поле, порождаемое всеми зарядами и токами, включая микроскопические заряды и токи в среде, а второй, ковариантный тензор Q_{ik}, выступает лишь в тех уравнениях, где фигурируют плотности одних только свободных зарядов и токов. Используя традиционные обозначения и наименования, можно сказать, что F_{ik} строится из компонент напряженности электрического поля **E** и индукции магнитного поля **B**, тогда как Q_{ik} — из компонент индукции электрического поля **D** и напряженности магнитного поля **H**.

Вторую пару образуют контравариантные тензоры, получаемые из ковариантных обычным образом:

$$F^{ik} = g^{im} g^{kl} F_{ml}; \quad Q^{ik} = g^{im} g^{kl} Q_{ml}.$$

При исследовании гравитационного излучения можно записать метрический тензор g_{ik} в виде $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$, где $g_{ik}^{(0)}$ относится к псевдоевклидову пространству ($g_{00}^{(0)} = -1$; $g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = 1$; $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), а h_{ik} — малые добавки, по отношению к которым рассмотрение достаточно проводить в линейном приближении.

Одна из групп уравнений электродинамики эквивалентна выражению F_{ik} через потенциалы:

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} A_i.$$

Другая же имеет вид [1, 2]

$$Q^{ik};\ k = \frac{4\pi}{c} J^i. \tag{1}$$

Посредством J^i обозначены усредненные по физически бесконечно малым объемам значения контравариантных составляющих плотности свободного заряда-тока. При выборе физически бесконечно малых областей усреднения кроме обычных для электродинамики требований нужно ввести дополнительно условие однородности гравитационного поля внутри каждой из таких областей; это последнее условие, в частности, дает возможность менять порядок ковариантного дифференцирования и усреднения.

Уравнения (1) нужно дополнить еще и материальными уравнениями; простейший их вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H}.$$

достаточен для дальнейшего.

Пусть имеется гравитационная плоская волна, распространяющаяся по оси $x \equiv x^1$. Отличные от нуля компоненты $h_{22} = -h_{33}$ и h_{23} можно записать таким образом:

$$h_{22} = h \cos \Omega \left(t - \frac{x}{c}\right); \ h_{23} = h \cos \left\{\Omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \Delta\right\}.$$

Пусть вдоль той же оси x распространяется и плоская электромагнитная волна, описываемая величинами

$$Q_{02} = D_y; \quad Q_{03} = -D_z; \quad F_{20} = E_y; \quad F_{30} = E_z;$$
$$Q_{12} = F_{12} = H_z; \quad Q_{31} = F_{31} = H_y,$$

зависящими также лишь от x и $x^0 \equiv ct$.

Подлежащие нахождению величины определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{(1 + h_{22}) E_y + h_{23} E_z\} - \frac{\partial}{\partial x} \{h_{33} H_y - (1 + h_{22}) H_z\} = 0, \\ &\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{(1 + h_{33}) E_z + h_{23} E_y\} - \frac{\partial}{\partial x} \{(1 + h_{33}) H_y - h_{23} H_z\} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

При получении (2) использовано условие линейности приближения, т. е. произведены замены:

$$\sqrt{-g}=\sqrt{1-h_{22}^2-h_{33}^2}\to 1;$$

$$g^{ik}g^{nl}\to g^{(0)ik}g^{(0)nl}+g^{(0)ik}h^{nl}+h^{ik}g^{(0)nl}.$$

Перейдем к уравнениям для потенциалов. Запишем их в виде A_i+a_i, где A_i — «невозмущенные» их значения, которые удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_i=0;\quad A_y=A\cos\omega\left(t-\frac{nx}{c}\right);$$

$$n\equiv\sqrt{\varepsilon};\quad A_z=A\cos\left\{\omega\left(t-\frac{nx}{c}\right)+\psi\right\}.$$

Для малых же добавок a_i запишем линеаризованные уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)a_y=-\frac{\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial t}\frac{\partial A_y}{\partial t}+\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)a_z=-\frac{\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial h_{33}}{\partial t}\frac{\partial A_z}{\partial t}+\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{\partial h_{33}}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Их решения в виде запаздывающих потенциалов имеют вид

$$a_y(x,\ t)=\frac{\Omega\omega hA}{2c}(n-1)\int\limits_{t_0}^{t}dt'\int\limits_{x-\frac{c}{n}(t-t')}^{x+\frac{c}{n}(t-t')}dx'\{\sin\Omega\tau\cdot\sin\omega\tilde{\tau}+$$

$$+\sin(\Omega\tau+\Delta)\sin(\omega\tilde{\tau}+\psi)\};$$

$$\tau\equiv t'-\frac{x'}{c};\ \tilde{\tau}\equiv t'-\frac{nx'}{c};$$

t_0 — момент «включения» взаимодействия.

Для $a_z(x,\ t)$ можно записать аналогичное выражение.

Типичный член в выражении для a_y таков:

$$a_y=\frac{\Omega\omega hA(n-1)}{4}\int\limits_{t_0}^{t}dt'\left\{\frac{\sin\left[t'\Omega\delta\,\frac{n\omega+\Omega}{c}\left(x-\frac{ct}{n}\right)\right]}{n\omega+\Omega}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\left[t'\Omega\delta+\frac{n\omega-\Omega}{c}\left(x-\frac{ct}{n}\right)\right]}{n\omega-\Omega}\right\};\quad \delta\equiv 1-\frac{1}{n}. \tag{3}$$

При $\Omega\delta(n-1)\ll 1$ подынтегральное выражение в (3) оказывается почти не зависящим от t', так что для a_y можно приближенно записать

$$a_y=\frac{1}{4}\Omega\omega hA(n-1)(t-t_0)\times$$

$$\times\left\{\frac{\sin\left(\omega-\frac{\Omega}{n}\right)\left(t-\frac{nx}{c}\right)}{n\omega-\Omega}+\frac{\sin\left(\omega+\frac{\Omega}{t}\right)\left(t-\frac{nx}{c}\right)}{n\omega+\Omega}\right\}. \qquad (4)$$

При переходе к (4) в подынтегральном выражении отброшены быстро осциллирующие члены, вклад которых весьма мал.

Получившийся результат (4) достаточно нагляден: дополнительно к первоначальной возникают две новые электромагнитные волны с комбинированными частотами $\omega \pm \Omega/n$ и несколько различающимися, но довольно близкими при $n\omega \gg \Omega$ амплитудами, возрастающими пропорционально длительности взаимодействия. Впрочем, если обе «первичные» волны — и электромагнитная и гравитационная — имеют одинаковую циркулярную поляризацию, то появляется лишь одна вторичная электромагнитная волна частоты $\omega-\Omega/n$; если направления циркуляций волн противоположны, то генерируется вторичная волна частоты $\omega+\Omega/n$. Особенно наглядно это описывается на «квантовом языке».

При $n=1$, т. е. в вакууме, амплитуды вторичных волн обращаются в нуль — это отражает известное положение о том, что в вакууме взаимодействие между распространяющимися в одном и том же направлении плоскими гравитационными и электромагнитными волнами в линейном приближении отсутствует [3, 4].

Появление вторичной электромагнитной волны частоты $\omega+\Omega/n$ соответствует слиянию гравитона частоты Ω и «первичного» фотона частоты ω в фотон частоты $\omega+\Omega/n$; этот процесс возможен, когда спины начального фотона и гравитона противоположны. Если же спины направлены одинаково, то разрешен процесс фотон→фотон+гравитон, при котором конечный фотон, очевидно, получает частоту $\omega-\Omega/n$.

Последний процесс, по-видимому наиболее интересный, при неквантовом описании соответствует случаю одинаковым образом циркулярно поляризованных электромагнитной и гравитационной волн.

Пройдя вместе расстояние L (если только $L<c/\Omega\delta$, что позволяет говорить о линейной зависимости между a_y и L), такие волны порождают вторичную электромагнитную волну, отношение амплитуды которой к амплитуде первичной (при реалистическом предположении $\delta \ll \ll 1$) может быть представлено в виде

$$\left|\frac{a_y}{A}\right| \approx \frac{L\delta h\Omega\omega}{c(\omega-\Omega)}.$$

Имея в виду распространение волн от далеких внеземных источников, можно для оценки показателя преломления n привлечь модель Зоммерфельда, рассматривая межзвездную среду состоящей в основном из протонов. При реалистических значениях плотности такое «вещество» весьма прозрачно — амплитуда электромагнитной волны оптического диапазона уменьшается примерно вдвое на расстоянии $10^{15} \div 10^{16}$ пк. В результате получаем

$$n=1-\frac{2\pi Ne^2}{m\omega^2} \approx 1-\frac{10^5}{\omega^2};$$

e — заряд, m — масса протона; принято, что плотность $N \approx 1$. Положив $\omega \approx 10^{10}$ 1/с, легко убедиться, что линейная зависимость между L и a_y продолжается до $L \approx 10^{25}\frac{1}{\Omega}$ см $\approx 10^8 \frac{1}{\Omega}$пк. Из (3) видно, что зависимость a_y от $t-t_0$ является периодической.

Периодическое увеличение и затем уменьшение амплитуды вторичной волны по мере увеличения расстояния, проходимого вместе первичной электромагнитной и гравитационной волнами (при квантовом описании эта периодичность может рассматриваться как результат проявления двух противоположных процессов фотон$\rightleftarrows$фотон+гравитон), приводят к появлению верхнего предела для $|a/A|$. Оценка для предела такова:

$$\left|\frac{a}{A}\right|_{\max} \approx \frac{h\omega}{\omega-\Omega} \approx h \text{ при } \omega \gg \Omega.$$

Пользуясь возможностью, благодарю В. Б. Брагинского за внимание к настоящей работе и полезные беседы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. [2] Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. [3] Брагинский В. Б., Грищук Л. П. и др. ЖЭТФ, 1973, 65, с. 1729. [4] Грищук Л. П. УФН, 1977, 121, № 4, с. 629.

Поступила в редакцию
15.10.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 621.378.46

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНОВЫМ ФРОНТОМ И ВРЕМЕННЫМ ПРОФИЛЕМ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

При использовании оптических пучков для передачи информации необходимо формировать пучки таким образом, чтобы нелинейные искажения при их прохождении через нелинейную среду были минимальными. Для этого проводят оптимизацию параметров пучка, используя один из следующих методов: вариационные методы (в частности, градиентный метод [1]), методы теории подобия [3—4], статистический метод [5]. Как правило, такие задачи требуют расчетов с применением ЭВМ. Для наиболее быстрого нахождения требуемых параметров пучка в первом приближении можно воспользоваться безаберрационным описанием [2] процесса распространения оптического излучения в нелинейной среде, согласно которому пучок характеризуется одной функцией $f(z, \eta)$ — его безразмерной шириной. Уравнения и граничные условия для этой функции имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \Theta; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \alpha F_{\text{нл}}(f, u_2 = I_0(\eta), z) + \frac{1}{f^3}, \tag{1}$$

$$f(0, \eta) = 1; \ \Theta(0, \eta) = R_{\text{д}}/R(\eta) = u_1(\eta).$$

Здесь z — координата, вдоль которой происходит распространение оптического излучения и которая измеряется в дифракционных длинах $R_{\text{д}} = (1/2)ka^2$; k — волновое число; a — размер пучка на входе в нелинейную среду; α характеризует нелинейное самовоздействие пучка; $F_{\text{нл}}$ описывает нелинейную рефракцию; $I_0(\eta)$ — форма импульса, η — время, нормированное на длительность импульса $\tau_{\text{и}}$; $R(\eta)$ — кривизна волнового фронта.