дим, модель правильно предсказывает возникновение очень большого скачка температуры (до 17° С) вблизи дна. Для лучшего соответствия расчетов и измерений необходимо положить $\lambda \to \infty$ (см. рис. 1), что близко к условиям в исследуемом море.

Из рис. 3 также видно, что наблюдаемое течение носит четко выраженный нагонный характер у поверхности (до глубины 12 м), где вдольбереговая составляющая скорости течения отсутствует. Ниже 12 м течение является сгонным, как и предсказывается моделью.

На рис. 4 показаны результаты расчетов угла наклона поверхности океана $\chi = \partial\zeta/\partial x$. Как видим, наличие стратификации приводит к дополнительному, весьма заметному искривлению поверхности относительно невозмущенного уровня океана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арсеньев С. А., Доброклонский С. В. и др. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1975, 11, № 8, с. 845. [2] Шелковников Н. К., Селезнев Н. К., Тимофеев В. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, 19, № 1, с. 9. [3] Иваненков Г. В. В кн.: Труды Гос. океаногр. ин-та, 1977, вып. 141, с. 19. [4] Арсеньев С. А. Сутырин Г. Г., Фельзенбаум А. И. ДАН СССР, 1976, 231, № 3, с. 567. [5] Арсеньев С. А., Фельзенбаум А. И. ДАН СССР, 1976, 227, № 5, с. 1101. [6] О'Брайен Дж., Кланси М. и др. В кн.: Моделирование и прогноз верхних слоев океана. Л.: Гидрометиздат, 1979, с. 214. [7] Нелепо Б. А., Куфтарков Ю. М., Косырев В. К. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1978, 14, № 7, с. 768. [8] Фельзенбаум А. И. ДАН СССР. 1980, 225, № 6, с. 1344. [9] Фельзенбаум А. И. В кн.: Итоги науки. Гидромеханика, 1968. М.: Изд. ВИНИТИ, 1970, с. 97. [10] Fuglister F. C. Atlantic ocean atlas of temperature and salinity profiles and data from the International Geophysical Year of 1957—1959. Wood-Hole (Massach.), 1960.

Поступила в редакцию
12.06.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1982. Т. 23, № 4

УДК 539.17.01

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИППМАНА — ШВИНГЕРА ДЛЯ НЕЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А. И. Васкин, Г. А. Иванов, А. М. Попова

(НИИЯФ)

§ 1. **Введение.** Во многих областях ядерной физики приходится иметь дело с задачами о рассеянии частиц при условии, что оператор взаимодействия является неэрмитовым и может быть задан, например, в виде

$$V = V_1 + iV_2, \tag{1}$$

где V_1 и V_2 — эрмитовы операторы. Подобные потенциалы обычно используются для описания неупругого рассеяния нерелятивистских частиц.

Как известно, амплитуда рассеяния двух взаимодействующих частиц $t(k, k', z)$ может быть определена на основе интегрального уравнения Липпмана — Швингера вида

$$t(k, k', z) = v(k - k') - \int v(k - k'') \left(\frac{k''^2}{2\mu} - z \right)^{-1} t(k'', k', z)\, dk''. \tag{2}$$

Здесь z — комплексная энергия, $z = E + i0$, k и k' — импульсы относительного движения двух частиц до и после рассеяния. Если k_1 и k_2

суть импульсы частиц 1 и 2 до рассеяния, а k'_1 и k'_2 — после рассеяния, m_1 и m_2 — массы частиц 1 и 2, то для k, k' и μ имеем по определению

$$k = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}, \quad k' = \frac{m_2 k_1' - m_1 k_2'}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

Интегрирование в (2) ведется по всему трехмерному пространству.

Интеграл, входящий в правую часть (2), становится сингулярным при выходе z на вещественную ось. Чтобы придать ему смысл при вещественных z, будем требовать выполнения следующих условий:

1) $v(k)$ — ограниченные функции k:

$$|v(k)| \leqslant CM(k); \tag{3}$$

2) $v(k)$ удовлетворяет условию Гельдера с оценочной функцией $M(k)$ и показателем $\alpha > 0$, т. е.

$$|v(k+h) - v(k)| \leqslant CM(k)\,|h|^{\alpha}, \tag{4}$$

где C — константа, $M(k)$ — некоторая оценочная функция переменной k.

В работах Повзнера [1] и Фаддеева [2] подробно исследовано уравнение (2) для случая эрмитова оператора взаимодействия и сформулированы условия на вид функции потенциала в импульсном представлении, при выполнении которых уравнение (2) имеет единственное решение.

В настоящей работе проводится анализ уравнения (2) и предлагается метод его решения для случая неэрмитова потенциала взаимодействия вида (1). Исследование этой простейшей из класса задач о взаимодействии N частиц с комплексным потенциалом представляется интересным, поскольку в нерелятивистской теории рассеяния она является основой для решения задач о рассеянии трех и более частиц.

§ 2. **Преобразование уравнения Липпмана — Швингера в случае комплексного потенциала.** Рассмотрим уравнение (2) в предположении, что потенциал взаимодействия в импульсном представлении имеет вид

$$v(k) = v_1(k) + iv_2(k), \tag{5}$$

где $v_1(k)$ и $v_2(k)$ — вещественные функции, для которых выполняются условия (3), (4).

Будем искать решение уравнения (2) для указанного потенциала (5) в виде

$$t(k, k', z) = t_1(k, k', z) + it_2(k, k', z). \tag{6}$$

Рассмотрим решение уравнения (2) для следующих значений параметра z:

$$z = z_0 + i0,$$

где z_0 — положительное вещественное число. Используя формулу Сохоцкого

$$\left(\frac{k''^2}{2\mu} - z_0 - i0\right)^{-1} = \mathscr{P}\left(\frac{k''^2}{2\mu} - z_0\right)^{-1} + i\pi\delta\left(\frac{k''^2}{2\mu} - z_0\right) \tag{7}$$

и определения (5), (6), можно переписать уравнение (2) в виде системы уравнений относительно функций $t_1(k, k', z)$ и $t_2(k, k', z)$, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$T(k, k', z) = V(k-k') + \mathscr{P}\int H_1(k-k'')\left(\frac{k''^2}{2\mu}-z_0\right)^{-1} T(k'', k', z)\,dk'' +$$
$$+ \pi\mu\sqrt{2\mu z_0}\int H_2(k-k_0'')\,T_z(k'', k', z)\,d\Omega_{k''}, \tag{8}$$

где

$$T=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix};\quad V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix};$$
$$H_1=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & -v_1 \end{pmatrix};\quad H_2=\begin{pmatrix} v_2 & v_1 \\ -v_1 & v_2 \end{pmatrix}; \tag{9}$$
$$T_z = T_{|k''|=\sqrt{2\mu z_0}}.$$

В первом интеграле уравнения (8) символ $\mathscr{P}$ означает, что интеграл берется в смысле главного значения в точке $|k''|=\sqrt{2\mu z_0}$. Во втором интеграле уравнения (8) интегрирование осуществляется по сфере единичного радиуса: $|k''|=1$. В сферической системе координат параметры, входящие в (9), выражаются следующим образом:

$$k'=(|k'|,\varphi',\theta');\quad k''=(|k''|,\varphi'',\theta''),$$
$$k_0''=(|k_0|,\varphi'',\theta''),\ \text{где}\ |k_0|^2=2\mu z_0.$$

Сделав в уравнении (8) тождественное преобразование для устранения особенности и введя новую функцию

$$\Phi(k'', k', z)=\frac{T(k'', k', z)-T(k_0'', k', z)}{k''^2/2\mu - z_0}, \tag{10}$$

перепишем уравнение (8) в виде

$$T(k, k', z) = V(k-k') + \int H_1(k-k'')\,\Phi(k'', k', z)\,dk'' +$$
$$+\mathscr{P}\int_0^\infty \frac{H_1(k-k'')}{k''^2/2\mu - z_0}|k''|^2 d|k''|\int T_z(k_0'', k', z)\,d\Omega_{k''} +$$
$$+\pi\mu\sqrt{2\mu z_0}\int H_2(k-k_0'')\,T_z(k'', k', z)\,d\Omega_{k''}. \tag{11}$$

Объединим в (11) последние два интеграла, поменяв в первом из них порядок интегрирования. Эта операция справедлива в силу условий (3), (4). В результате уравнение (11) может быть представлено в виде

$$T(k, k', z) = V(k-k') + \int H_1(k-k'')\,\Phi(k'', k', z)\,dk'' +$$
$$+\int \mathscr{T}(k, \Omega_{k''})\,T_z(k_0'', k', z)\,d\Omega_{k''}, \tag{12}$$

где введено обозначение

$$\mathscr{T}(k, \Omega_{k''}) = \mathscr{P}\int_0^\infty \frac{H_1(k-k'')}{k''^2/2\mu - z_0}|k''|^2 d|k''| + \pi\mu\sqrt{2\mu z_0}\,H_2(k-k_0'').$$

Рассмотрим (12) в точке $k=k_0(|k_0|, \varphi, \theta)$:

$$T(k_0, k', z) - \int \mathcal{T}(k_0, \Omega_{k''}) T(k'', k', z)\, d\Omega_{k''} =$$

$$= V(k_0 - k') + \int H_1(k_0 - k'') \Phi(k'', k', z)\, dk''. \tag{13}$$

Предположим, что существует резольвента $R(k_0, k', z)$ левой части (13). Тогда для $T(k_0, k', z)$ имеем:

$$T(k_0, k', z) = RV(k_0 - k') + \int RH_1(k_0 - k'') \Phi(k'', k', z)\, dk''. \tag{14}$$

Подставив выражение (14) в уравнение (12) и сгруппировав вместе члены, содержащие функцию $\Phi(k'', k', z)$, получим

$$T(k, k', z) = V(k - k') + \int \mathcal{T}(k, \Omega_{k''}) RV(k_0'' - k')\, d\Omega_{k''} +$$

$$+ \int [H_1(k - k'') + \int \mathcal{T}(k, \Omega_{k''}) RH_1(k_0''' - k'')\, d\Omega_{k'''}] \Phi(k'', k', z)\, dk''. \tag{15}$$

Подставим теперь в уравнение (15) значение $k=k_0$, где $k_0 = (|k_0|, \varphi, \theta)$. Уравнение, полученное после указанной подстановки, вычтем из исходного уравнения (15). Далее, поделив эту разность на величину $(k^2/2\mu - z_0)$, получим с учетом условия (10)

$$\Phi(k, k', z) = \widetilde{V} + \int \widetilde{\mathcal{T}}(k, \Omega_{k''}) RV(k_0'' - k')\, d\Omega_{k''} +$$

$$+ \int [\widetilde{H}_1(k - k'') + \int \widetilde{\mathcal{T}}(k, \Omega_{k''}) R\widetilde{H}_1(k_0''' - k'')\, d\Omega_{k'''}] \Phi(k'', k', z)\, dk'', \tag{16}$$

где

$$\widetilde{V} = \frac{V(k - k') - V(k - k')\,|_{|k| = \sqrt{2\mu z_0}}}{k^2/2\mu - z_0},$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}(k, \Omega_{k''}) = \frac{\mathcal{T}(k, \Omega_{k''}) - \mathcal{T}(k, \Omega_{k''})\,|_{|k| = \sqrt{2\mu z_0}}}{k^2/2\mu - z_0},$$

$$\widetilde{H}_1(k - k'') = \frac{H_1(k - k'') - H_1(k - k'')\,|_{|k| = \sqrt{2\mu z_0}}}{k^2/2\mu - z_0}.$$

Уравнение (16) может содержать лишь слабую особенность, будучи уравнением фредгольмовского типа, и поэтому может служить основой для численного решения.

§ 3. Доказательство единственности решения системы (16). Полученное выражение (16) есть интегральное уравнение типа уравнения Фредгольма 2-го рода и позволяет находить решение всюду, где z не является собственным значением упомянутого уравнения. Интересно, однако, указать условия, при которых данное уравнение имеет единственное решение. Будем считать, что все входящие функции принадлежат классу $\mathcal{H}$, тогда имеет место следующая

Теорема. Пусть функции $v_i(k)$ и $\widetilde{v}_i(q, h_1) = \dfrac{v_i(q) - v_i(q + h_1)}{|h_1|}$ удовлетворяют условиям (3), (4) с показателями $\alpha > 0$, $\mu > 3$ и оценочными функциями $M(k)$ и $M_1(k)$ соответственно, так что

$$|v_i(k)| \leqslant C(1 + |k|)^{-\mu},$$

$$|v_i(k) - v_i(k + h)| \leqslant C(1 + |k|)^{-\mu} |h|^{\alpha},$$

$$|\widetilde{v}_i(qh_1)| \leqslant C(1 + |q|)^{-\mu},$$

$$|\widetilde{v}_i(q_1 h_1) - \widetilde{v}_i(q + h_2, h_1)| \leqslant C(1 + |q|)^{-\mu} |h_2|^{\alpha}.$$

Тогда для достаточно больших z интегральное уравнение (16) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы может быть проведено по следующей схеме. Вначале доказывается существование резольвенты интегрального оператора (13) методом оценок интегралов, входящих в уравнение (12) с использованием леммы II.2 работы [2]. Далее с помощью той же леммы производится оценка нормы интегрального оператора (16), которая имеет вид $C/\sqrt{z_0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Повзнер А. Я. ДАН СССР, 1955, **104**, № 3, с. 360. [2] Фаддеев Л. Д. Труды МИАН, 1963, **19**, 119 с.

Поступила в редакцию
15.01.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 531.19

О РЕЛАКСАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

А. Г. Шумовская, А. С. Шумовский

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

В предыдущей работе [1] было получено точное (в термодинамическом пределе) уравнение, описывающее эволюцию параметра порядка в классической спиновой системе с парным взаимодействием бесконечного радиуса (см. также [2]). Указанное точное уравнение эволюции совпадает с известным феноменологическим уравнением Ландау — Халатникова.

Рассмотренные в [1, 2] модельные задачи с классическими гамильтонианами относятся к широкому классу квазиспиновых модельных задач статистической механики, исследуемых в связи с описанием явлений сверхпроводимости, ферромагнетизма, сверхтекучести сегнетоэлектричества и т. д. [3]. Поэтому несомненный интерес представляет обобщение метода работы [1] на случай квантовых квазиспиновых моделей и получение уравнений эволюции для параметра порядка в достаточно общем случае. В этой связи в настоящей работе мы начнем с рассмотрения простейшей квантовой квазиспиновой модельной задачи, характеризуемой гамильтонианом

$$H = -\Omega \sum_i \sigma_i^x - \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - p\mathscr{E} \sum_i \sigma_i^z, \tag{1}$$

где $\sigma_i^{\cdots}$ — соответствующая матрица Паули, относящаяся к i-й «частице» системы. Гамильтониан такого вида применяется обычно для описания фазовых переходов в сегнетоэлектриках с водородными связями [4]. В этом случае первый член в (1) описывает туннелирование протона в потенциале водородной связи с симметричными ямами, второй — прямое взаимодействие диполей и третий — воздействие внешнего электрического поля $\mathscr{E}$ (p — величина дипольного момента).

Так как приближение среднего поля дает для сегнетоэлектриков типа порядок-беспорядок хорошее согласие с экспериментом [5], ниже мы рассмотрим случай взаимодействия «бесконечного радиуса»:

$$J_{ij} = \frac{J}{N}, \quad J = \text{const},$$