Тогда для достаточно больших z интегральное уравнение (16) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы может быть проведено по следующей схеме. Вначале доказывается существование резольвенты интегрального оператора (13) методом оценок интегралов, входящих в уравнение (12) с использованием леммы II.2 работы [2]. Далее с помощью той же леммы производится оценка нормы интегрального оператора (16), которая имеет вид $C/\sqrt{z_0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Повзнер А. Я. ДАН СССР, 1955, **104**, № 3, с. 360. [2] Фаддеев Л. Д. Труды МИАН, 1963, **19**, 119 с.

Поступила в редакцию
15.01.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 531.19

О РЕЛАКСАЦИИ К РАВНОВЕСИЮ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

А. Г. Шумовская, А. С. Шумовский

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

В предыдущей работе [1] было получено точное (в термодинамическом пределе) уравнение, описывающее эволюцию параметра порядка в классической спиновой системе с парным взаимодействием бесконечного радиуса (см. также [2]). Указанное точное уравнение эволюции совпадает с известным феноменологическим уравнением Ландау — Халатникова.

Рассмотренные в [1, 2] модельные задачи с классическими гамильтонианами относятся к широкому классу квазиспиновых модельных задач статистической механики, исследуемых в связи с описанием явлений сверхпроводимости, ферромагнетизма, сверхтекучести сегнетоэлектричества и т. д. [3]. Поэтому несомненный интерес представляет обобщение метода работы [1] на случай квантовых квазиспиновых моделей и получение уравнений эволюции для параметра порядка в достаточно общем случае. В этой связи в настоящей работе мы начнем с рассмотрения простейшей квантовой квазиспиновой модельной задачи, характеризуемой гамильтонианом

$$H=-\Omega\sum_i\sigma_i^x-\sum_{i,j}J_{ij}\sigma_i^z\sigma_j^z-p\mathscr{E}\sum_i\sigma_i^z, \tag{1}$$

где $\sigma_i^{\cdots}$ — соответствующая матрица Паули, относящаяся к i-й «частице» системы. Гамильтониан такого вида применяется обычно для описания фазовых переходов в сегнетоэлектриках с водородными связями [4]. В этом случае первый член в (1) описывает туннелирование протона в потенциале водородной связи с симметричными ямами, второй — прямое взаимодействие диполей и третий — воздействие внешнего электрического поля $\mathscr{E}$ (p — величина дипольного момента).

Так как приближение среднего поля дает для сегнетоэлектриков типа порядок-беспорядок хорошее согласие с экспериментом [5], ниже мы рассмотрим случай взаимодействия «бесконечного радиуса»:

$$J_{ij}=\frac{J}{N},\ J=\mathrm{const},$$

где N — полное число диполей в системе. Тогда в соответствии с методом Боголюбова (мл.) [6], распространенным на квазиспиновые модели рассматриваемого типа в работе [7], равновесное состояние системы с гамильтонианом (7) точно (при $N \to \infty$) описывается аппроксимирующим гамильтонианом вида

$$H_{\text{апп}} = -\sum_{i=1}^{N} (\Omega \sigma_i^x + p\widetilde{\mathscr{E}}\sigma_i^z) + NJC^2, \tag{2}$$

где эффективное поле $\widetilde{\mathscr{E}} \equiv \mathscr{E} + (1/p)2JC$ и $C = \langle \sigma_i^z \rangle$, откуда

$$C = \frac{p\widetilde{\mathscr{E}}}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{\theta}, \qquad \lambda \equiv \sqrt{\Omega^2 + (p\widetilde{\mathscr{E}})^2}. \tag{3}$$

Обычно в методе Боголюбова (мл.) [6] термодинамическая эквивалентность модельного и аппроксимирующего гамильтонианов устанавливается в смысле совпадения удельных значений соответствующих свободных энергий. Однако в нашем случае, используя результаты работы [8], можно показать, что гамильтонианы (1) и (2) эквивалентны также и в смысле генераторов временной эволюции:

$$\lim_{N\to\infty} e^{iHt} \mathscr{O} e^{-iHt} = \lim_{N\to\infty} e^{iH_{\text{апп}}t} \mathscr{O} e^{-iH_{\text{апп}}t}, \tag{4}$$

где $\mathscr{O}$ — оператор из алгебры наблюдаемых. Это обстоятельство позволяет рассматривать динамику модельной задачи (1), используя аппроксимирующий гамильтониан (2).

Уравнение движения для векторного оператора $\bar{\sigma}_i(t) = e^{iH_{\text{апп}}} \sigma_i e^{-iH_{\text{апп}}t}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}_i(t) = \boldsymbol{\sigma}_i(t) \times \mathbf{A}, \ \mathbf{A} = (\Omega, 0, p\widetilde{\mathscr{E}}). \tag{5}$$

Уравнение (5) описывает когерентную квазиларморовскую прецессию квазиспинов с частотой 2λ.

Перейдем для гамильтониана (2) к диагональному представлению с помощью канонического преобразования $\sigma_i = R\tau_i$, где

$$R = \begin{pmatrix} -u^2 & -uv & v \\ v & -u & 0 \\ uv & v^2 & u \end{pmatrix}, \qquad u = \frac{p\widetilde{\mathscr{E}}}{\lambda}, \quad v = \frac{\Omega}{\lambda}.$$

В диагональном «τ-представлении» гамильтониан (2) имеет вид

$$H_{\text{апп}}^{(\tau)} = -\sum_i \lambda \tau_i^z + JNC^2, \tag{6}$$

и соответствующее (5) уравнение движения есть

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i \times \mathbf{A}^{(\tau)}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A}^{(\tau)} = (0, 0, 2\lambda)$. Это уравнение описывает прецессию с частотой 2λ относительно направления оси $z^{(\tau)}$, причем, как нетрудно видеть,

$$\langle \boldsymbol{\tau}^z \rangle = \operatorname{th} \frac{\lambda}{\theta} \tag{8}$$

$$\lambda = \begin{cases} 2J\langle\tau^z\rangle, & \mathscr{E}=0, \\ \left[\Omega^2 + (p\mathscr{E})^2\left(1+\dfrac{2J\,\xi\langle t\rangle}{\theta\,\mathrm{Arth}\,\langle\tau^z\rangle - 2J\langle\tau^z\rangle}\right)\right]^{1/2}, & \mathscr{E}\neq 0. \end{cases}$$

Замечая, что гамильтониан (6) формально совпадает с частной формой гамильтониана работы [1] и считая, что в процессе релаксации к равновесию сохраняется прецессионный характер движения квазиспинов, т. е. со временем меняются средняя величина $\langle\tau^z\rangle$, частота прецессии и угол прецессии, из [1] получаем следующее уравнение эволюции типа кинетического уравнения Паули:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Gamma\left(-\xi + \mathrm{th}\,\frac{\lambda(t)}{\theta}\right), \tag{9}$$

где Γ — кинетический коэффициент Онсагера и

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2J\xi(t), & \mathscr{E}=0, \\ \left[\Omega^2 + (p\mathscr{E})^2\left(1+\dfrac{2J\xi(t)}{\theta\,\mathrm{Arth}\,\xi(t) - 2J\xi(t)}\right)\right]^{1/2}, & \mathscr{E}\neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Зависимость частоты прецессии от времени задается соотношением

$$\omega(t) = 2\lambda(t), \tag{11}$$

а, как показывают несложные геометрические построения, угол прецессии $\alpha(t)$ меняется со временем по закону

$$\alpha(t) = \arccos\xi(t). \tag{12}$$

Таким образом, система уравнений (9)—(12) полностью описывает эволюцию в рассматриваемой модельной системе.

Рассмотрим еще один пример квазиспиновой модельной системы, динамические свойства которой могут быть описаны на основе уравнений, подобных (9)—(12). Пусть система характеризуется так называемым гамильтонианом Тирринга [8, 9]

$$H = \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p(0-\sigma_r^z) - \frac{T_c}{N}\sum_{p\,p'}\sigma_p^-\sigma_{p'}^+. \tag{13}$$

Здесь $T_c=\mathrm{const}$, $\sigma_p^\pm \equiv \frac{1}{2}(\sigma_p^x \pm i\sigma_p^y)$, N — число парных состояний в сверхпроводнике. Первый член описывает кинетическую энергию электронов, а второй — взаимодействие электронов с противоположно направленными импульсами и спинами. Подчеркнем, что подобного рода гамильтониан возникает также при рассмотрении задачи о взаимодействии когерентного электромагнитного поля с двухуровневыми атомами в твердых телах [10]. Соответствующий (13) аппроксимирующий гамильтониан имеет вид [9] (в простейшем случае сильного спаривания в системе, когда $\varepsilon_p=\varepsilon=\mathrm{const}$ [8])

$$H_{\text{апп}} = \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p(0-\sigma_p^z) - T_c\sum_p(\sigma_p^- C^* + \sigma_p^+ C - CC^*), \tag{14}$$

$$C = \frac{T_c C}{\lambda}\,\mathrm{th}\,\frac{\lambda}{2\theta}, \quad \lambda \equiv \sqrt{\varepsilon^2 + 4T_c^2|C|^2}. \tag{15}$$

Соответствующее (5) уравнение движения квазиспина имеет вид

$$\frac{d\sigma_p}{dt} = \sigma_p \times \mathbf{A},\ \mathbf{A} = (4T_c\,\mathrm{Re}\,C,\ i4T_c\,\mathrm{Im}\,C,\ 2\varepsilon),$$

т. е. также описывает прецессию с частотой 2λ. Каноническое преобразование $\sigma_p = R\tau_p$ представляет собой в этом случае поворот в плоскости XY пространства квазиспиновых переменных, задаваемый неособенной матрицей вида

$$R = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 & 0 & 2uv \\ 0 & 1 & 0 \\ -2uv & 0 & u^2 - v^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u = \sqrt{\dfrac{\varepsilon + 2\lambda}{2\lambda}}, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{matrix}$$

В диагональном «τ-представлении» вновь получаем гамильтониан вида (6)

$$H^{(\tau)}_{\text{апп}} = \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p - \sum_p \lambda\tau_p^z + NT_c|C|^2. \qquad (16)$$

Поэтому уравнение эволюции для неравновесного среднего $\xi(t) = \langle\tau^z(t)\rangle$ имеет вид (9), где $\lambda(t) = 2T_c\xi(t)$. Таким образом, и в этом случае динамика рассматриваемой системы описывается системой уравнений (9), (11), (12).

Выше мы указывали на аналогию модельной задачи Тирринга (13) с моделью, применяемой для описания резонансного взаимодействия когерентного поля с двухуровневыми излучателями. Отметим, что в последнее время динамические свойства таких систем интенсивно исследуются в связи с проблемой создания сверхизлучательного гамма-лазера [11, 12]. Так как интенсивность излучения определяется величиной

$$\eta(t) = \frac{g^2}{\omega^2}\xi(t) - \frac{\omega^2}{4g^2},$$

характеризующей макроскопическое заполнение резонансной моды с частотой ω [13] (здесь g — интенсивность взаимодействия фотонов с излучателями [14]), то уравнение (9) позволяет определить динамический характер высвечивания в зависимости от параметров системы.

Для получения необходимых оценок в уравнениях (9), (11), (12) следует сделать замену $T_c \to g^2/\omega$, $\varepsilon \to \omega$. Рассмотрим случай слабого начального возбуждения в системе. Тогда, разлагая правую часть уравнения (9) по малому параметру $(\xi - \omega^2/2g^2)$, получаем уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \Gamma\left\{-\xi + \operatorname{th}\frac{\omega}{2\theta} + \operatorname{sech}^2\frac{\omega}{2\theta}\cdot\left(\xi - \frac{\omega^2}{2g^2}\right) + o\left[\left(\xi - \frac{\omega^2}{2g^2}\right)^2\right]\right\},$$

решение которого имеет вид

$$\xi(t) = \mathfrak{U} + [\xi(0) - \mathfrak{U}]\exp\left\{-\left(1 - \frac{\omega^2}{2g^2}\operatorname{sech}^2\frac{\omega}{2\theta}\right)\Gamma\cdot t\right\},$$

$$\mathfrak{U} = \frac{\operatorname{th}\dfrac{\omega}{2\theta}\cdot\operatorname{ch}^2\dfrac{\omega}{2\theta} - \dfrac{\omega^2}{2g^2}}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\omega}{2\theta} - \dfrac{\omega^2}{2g^2}}.$$

Отсюда для времени релаксации T, определяемого по уменьшению $\xi(t)$ в e раз, находим

$$T = \frac{\ln\{(8g^6 - 4g^4\omega^2 - 2g^2\omega^4 + \omega^6)/(8g^6 - 4g^4\omega^2 - 2g^2\omega^4 + \omega^6)\}}{\Gamma\left(1 - \dfrac{\omega^2}{2g^2} + \dfrac{\omega^6}{8g^6}\right)}.$$

Так как $g \sim \sqrt{\rho}$, где ρ — плотность излучателей в среде [14], то время релаксации в девозбужденное состояние (время излучения) убывает с увеличением плотности ρ. Заметим, что время излучения сильно зависит от кинетического коэффициента Γ, являющегося в данном подходе феноменологической константой. Для корректного микроскопического определения Γ необходимо использовать какой-либо иной метод, например метод работы [15].

Таким образом, мы показали, что подход работы [1] оказывается также пригодным и для квантовых модельных систем, относящихся к классу, определенному в работе [3].

Авторы приносят глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову (мл.) за внимание к работе и ценные замечания. Мы также благодарны Ю. А. Ильинскому, В. И. Юкалову и И. Р. Юхновскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шумовская А. Г., Шумовский А. С. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1979, 20, № 2, с. 51. [2] Achmetely A. M., Kudryavtsev I. K., Shumovsky A. S. Acta Phys. Polon., 1980, A58, p. 23. [3] Шумовский А. С. В кн.: Проблемы статистической механики. Дубна, 1978, с. 168—183. [4] Novacović L. The pweudo-spin method in magnetism and ferroelectricity. Pergamon Press, Oxford, 1975. [5] Блинц Р., Жекш Б. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. М., 1975. [6] Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М., 1974. [7] Шумовский А. С. О некоторых асимптотически точных методах в случае квазиспиновых моделей. Препринт ИТФ-71-56Р. Киев, 1971. [8] Thirring W. Comm Math. Phys., 1968, 7, p. 181. [9] Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S. Indian J. Pure and Appl. Phys., 1970, 8, p. 121. [10] Кудрявцев И. К., Мелешко А. Н., Шумовский А. С. Квант. электроника, 1979, 6, с. 2573. [11] Андреев А. В., Ильинский Ю. А., Хохлов Р. В. ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1296. [12] Андреев А. В., Арутюнян Р. В., Ильинский Ю. А. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1979, 20, № 5, с. 47. [13] Кудрявцев И. К., Мелешко А. Н., Шумовский А. С. ДАН СССР, 1979, 248, с. 335. [14] Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М., 1978. [15] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.). ЭЧАЯ, 1980, 11, с. 245.

Поступила в редакцию
20.01.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 539.293.011.2

О ПРИРОДЕ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ С РАДИАЦИОННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

В. Л. Бонч-Бруевич, П. С. Сульженко

(кафедра физики полупроводников)

§ 1. **Введение и постановка задачи.** Как известно [1, 2], под действием нейтронного облучения в полупроводнике могут возникать скопления дефектов — кластеры, содержащие до $10^5 \div 10^6$ атомов. Форма кластеров, по-видимому, близка к сферической, причем характерный радиус R составляет $2 \div 3 \cdot 10^{-6}$ см. Столь большие размеры кластеров позволяют рассматривать их как своего рода включения новой фазы, обладающие, вообще говоря, не тем типом проводимости, что матрица основного вещества. По-видимому, в облученном n-Ge возникают кластеры p-типа, а в n-Si — кластеры с почти собственной проводимостью (сильно компенсированные). Видимо, даже ширина запрещенной зоны в кластере может несколько отличаться от значения, соответствующего