ционное излучение от пульсаров и реликтовый ГВШ. К примеру, пульсар в Веле дает [10] $\omega_g h \sim 10^{-22}$, а реликтовый ГВШ [11] $\omega_g h \sim 10^{-21}$. Если довести стандарты частоты до величины

$$\frac{1}{\tau^*} \frac{\delta\nu}{\nu} \approx 10^{-22},$$

то можно будет осуществить такой эксперимент.

Автор благодарит сотрудников ИТФ Варшавского университета за полезные дискуссии и внимание к работе автора во время стажировки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Anderson A. J. Nature, 1971, **229**, p. 547. [2] Руденко В. Н. Астрон. журн., 1975, **19**, с. 270. [3] Estabrook F. B., Wahlquist H. D. Gen. Rel. Grav., 1975, **6**, p. 439. [4] Грищук Л. П., ЖЭТФ, 1974, **66**, с. 833. [5] Mashoon B. Astrophys. J., 1979, **227**, p. 1019. [6] Grishchuk L. P., Mashoon B. Astrophys. J., 1980, **236**, p. 990. [7] Сажин М. В. Астрон. журн., 1978, **55**, с. 65. [8] Detweiler S. Astrophys. J., 1979, **234**, p. 1100. [9] Stein S. R., Turneaure J. P. Proc. IEEE, 1975, **63**, p. 1249. [10] Zimmerman M. Nature, 1978, **271**, p. 524. [11] Старобинский А. А. Письма в ЖЭТФ, 1979, **30**, с. 719.

Поступила в редакцию
17.02.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 533.951

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

**Л. С. Кузьменков, П. А. Поляков,
М. И. Ситнов, О. О. Трубачев**

(кафедра теоретической физики)

Функция диэлектрического отклика $\varepsilon_l(k, \omega)$ полностью описывает продольные свойства плазмы. Эта функция исследовалась Силиным [1]. Для максвелловской плазмы им была получена асимптотическая формула для $\varepsilon_l(k, \omega)$ в ультрарелятивистском пределе, на основании которой затем найдена дисперсия сверхсветовых ($\omega \gg kc$) и почти световых ($\omega \sim kc$) волн. Позднее эти результаты были критически пересмотрены в работах Ломинадзе, Михайловского, Сагдеева [2, 3], в которых, в частности, показано существование досветовых волн ($\omega \ll kc$).

Мы ставим своей задачей детальное аналитическое исследование функции диэлектрического отклика максвелловской релятивистской плазмы и построение для нее корректных разложений, позволяющих получить как асимптотические выражения для $\varepsilon_l(k, \omega)$, так и области значений k и ω, для которых эти выражения и соответствующие им дисперсионные формулы имеют смысл.

Как функция комплексной переменной ω $\varepsilon_l(k, \omega)$ задается на верхней полуплоскости и на действительной оси при $(\omega/kc)^2 > 1$ формулой [1]

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 c^2}{mk^2} \int \frac{k(\partial f_0/\partial u)}{\omega - kv} d^3u. \tag{1}$$

Для остальных значений ω эта функция определяется аналитическим продолжением сверху через отрезок действительной оси $(\omega/kc)^2 < 1$. Точки $\omega = \pm kc$ являются точками ветвления.

Принимая во внимание, что f_0 есть релятивистское распределение Максвелла, и проводя интегрирование в (1) сначала по углам сферической системы координат в пространстве 4-скоростей u^i, а затем по частям, получим

$$\varepsilon_l = 1 + \alpha z_p^2 - z z_p^2 (\widehat{B}_\alpha G)/2\alpha K_2(\alpha), \tag{2}$$

где

$$\widehat{B}_\xi = 2 - 2\alpha\, \partial/\partial\xi + \alpha^2 \partial^2/\partial\xi^2, \tag{3}$$

$$G = 2z \int\limits_1^\infty \frac{\exp(-\alpha u_0)}{(z^2-1)u_0^2+1} \frac{du_0}{u}, \tag{4}$$

$$z = \omega/kc; \quad z_p = \omega_p/kc; \quad \alpha = mc^2/\Theta.$$

Формулу (4) можно преобразовать к виду, удобному для разложений по степеням температуры. В результате преобразований найдем

$$G = -\frac{2z}{\sqrt{z^2-1}} \int\limits_\alpha^\infty K_0(\xi) \sin\frac{\alpha-\xi}{\sqrt{z^2-1}}\, d\xi$$

при $z > 1$ и $z < 1$. Кроме того,

$$G = -\left(i\pi + \frac{1}{2}\ln\frac{1-z}{1+z}\right)\exp(-\alpha\beta) +$$

$$+ \beta z \exp(\alpha\beta) \int\limits_\alpha^\infty K_0(\xi)\exp(-\beta\xi)\, d\xi +$$

$$+ \beta z \exp(-\alpha\beta) \int\limits_0^\alpha K_0(\xi)\exp(\beta\xi)\, d\xi, \quad \beta \equiv (1-z^2)^{-1/2} \tag{5}$$

при $0 < z < 1$ и $G = 2K_0(\alpha)$ при $z = 1$.

Интегральное представление функции G, удобное при численных расчетах, рассмотрено в работе [5].

Так как ε_l при $z \geqslant 1$ имеет непрерывные производные по z любого порядка, достигающие максимальных значений по абсолютной величине в точке $z = 1$, то справедливы неравенства

$$\left|\varepsilon_l - \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-1)^k}{k!}\left(\frac{\partial^k \varepsilon_l}{\partial z^k}\right)_{z=1}\right| \leqslant \frac{(z-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left|\frac{\partial^{n+1}\varepsilon_l}{\partial z^{n+1}}\right|_{z=1}. \tag{6}$$

Частные производные в формуле (6) вычисляются точно при любых температурах. В линейном по z приближении находим при $\omega \geqslant kc$

$$\varepsilon_l = 1 - z_p^2[a(\alpha) + (1-z)b(\alpha)] + R(\alpha, z), \tag{7}$$

$$a(\alpha) = [2K_0(\alpha) + \alpha K_1(\alpha)]/\alpha K_2(\alpha), \tag{8}$$

$$b(\alpha) = 2[5K_0(\alpha) + (\alpha + 12/\alpha)K_1(\alpha)]/\alpha K_2(\alpha), \tag{9}$$

причем остаточный член оценивается неравенством

$$|R(\alpha, z)| \leqslant \frac{(z-1)^2 z_p^2}{\alpha K_2(\alpha)}\left|\widehat{B}_\alpha\left[1 - 5\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}\right]K_0(\alpha)\right|. \tag{10}$$

Если, кроме того, $|R|$ в M раз меньше линейных слагаемых в (7), то из (7), (10) для ультрарелятивистских температур имеем

$$\left[\sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}} + \left(a - \frac{\alpha}{M}\right) \Big/ \sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}}\right] \leqslant$$

$$< \frac{2kc}{\omega_p} \leqslant \left[\sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}} + a \Big/ \sqrt{\alpha \ln \frac{1}{\alpha}}\right], \qquad (11)$$

где

$$a \cong \alpha \ln(1/\alpha) + \alpha(1/2 + \ln 2 - C),$$

C — постоянная Эйлера.

Продольные волны с волновыми векторами из области (11) имеют равный нулю декремент затухания и дисперсию

$$\omega/kc = 1 + 2\left(\omega_p \sqrt{a} - kc\right) \sqrt{a}/b\omega_p.$$

Световая волна имеет значение волнового вектора, равное $\omega_p^2 \sqrt{a}/c$ и являющееся пороговым для незатухающих мод. С ростом температуры это значение сначала возрастает, а затем начиная с температур $\Theta \sim mc^2$ убывает по закону $(\omega_p/c)\sqrt{\alpha \ln(1/\alpha)}$, так что область существования продольных незатухающих волн в ультрарелятивистской плазме сильно сужается.

Рассмотрим теперь функцию диэлектрического отклика и дисперсионные соотношения в области $0 < \mathrm{Re}\,\omega < kc$. При $|\mathrm{Im}\,z| \ll |\mathrm{Re}\,z| < 1$ формулы (3), (4), (5) приводят к результату

$$\widehat{B}_\alpha G = -\left(i\pi + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|\right)\widehat{B}_\alpha e^{-\alpha\beta} -$$

$$-\alpha\beta z(2+\alpha\beta)\left[K_0(\alpha) - \alpha K_0'(\alpha)\right] e^{-\alpha\beta} + \beta z \int_\alpha^\infty e^{\beta(\alpha-\xi)} \widehat{B}_\xi K_0(\xi)\, d\xi + \qquad (12)$$

$$+ \beta z e^{-\alpha\beta} \int_0^\alpha \left[e^{\beta\xi} \widehat{B}_\xi K_0(\xi) + 2\alpha K_0'(\xi) - \alpha^2(1+\beta\xi) K_0''(\xi)\right] d\xi.$$

Отсюда и из формулы (2) видно, что мнимая часть ε_l пропорциональна $\exp(-\alpha\beta)$. Неравенство $\alpha\beta \gg 1$ является условием слабого затухания продольных колебаний. Оценим при этом условии значения интегралов в формуле (12). Фиксируя некоторое $\alpha' \in (0, \alpha)$, имеем

$$\int_\alpha^\infty K_0^{(i)} e^{-\beta(\xi-\alpha)}\, d\xi = \sum_{l=0}^n \frac{K_0^{(l+i)}(\alpha)}{\beta^{l+1}} \left(1 - e^{-\alpha'\beta} \sum_{m=0}^l \frac{(\alpha'\beta)^m}{m!}\right) + r_1^{(i)} + r_2^{(i)}, \qquad (13)$$

где (i) — порядок производной и

$$|r_1^{(i)}| \leqslant K_0^{(i)}(\alpha + \alpha')\, e^{-\alpha'\beta}/\beta; \quad |r_2^{(i)}| \leqslant K_0^{(n+i+1)}(\alpha)/\beta^{n+2}.$$

Для трех оставшихся интегралов в (11) находим

$$\int_0^\alpha K_0^{(i)}(\xi) \begin{Bmatrix} e^{\beta(\xi-\alpha)}, & i=0 \\ e^{-\alpha\beta}(e^{\beta\xi} - 1), & i=1 \\ e^{-\alpha\beta}(e^{\beta\xi} - 1 - \beta\xi), & i=2 \end{Bmatrix} d\xi =$$

$$= \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{K_0^{(l+i)}(\alpha)}{\beta^{l+1}} \left(1 - e^{-\alpha'\beta} \sum_{m=0}^l \frac{(\alpha'\beta)^m}{m!}\right) + \sum_{m=3}^5 r_m^{(i)}, \qquad (14)$$

где

$$r_3^{(0)} \leqslant (\pi/2)\, e^{-\beta\alpha'},$$

$$r_3^{(1)} \leqslant (e^{-\beta\alpha'} - e^{-\alpha\beta}) \left[K_0(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha') + \frac{\pi}{2} \right] \Big/ (\alpha-\alpha'),$$

$$r_3^{(2)} \leqslant \{e^{-\beta\alpha'} - e^{-\alpha\beta}[1+\beta(\alpha-\alpha')]\}[2K_0(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha') -$$

$$- K_0'(\alpha-\alpha') + \pi]/(\alpha-\alpha')^2,$$

$$r_4^{(0)} = 0,$$

$$r_4^{(1)} \leqslant e^{-\alpha\beta} K_0'(\alpha-\alpha')\,\alpha',$$

$$r_4^{(2)} \leqslant e^{-\alpha\beta} K_0''(\alpha-\alpha')(1+\beta)\,\alpha',$$

$$r_5^{(i)} \leqslant K_0^{(n+i+1)}(\alpha-\alpha')/\beta^{n+2}.$$

Формулами (2), (12), (13), (14) полностью определена продольная диэлектрическая проницаемость для случая $\alpha\beta \gg 1$, $\beta \gg 1$ с известными оценками остаточных членов $r_m^{(i)}$. Положим теперь $\alpha' = \alpha/2$, $n=1$ и ограничимся первым приближением для $\mathrm{Im}(\hat{B}_\alpha G)$. Тогда

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{i\pi z z_p^2 \alpha\beta^2}{2K_2(\alpha)} e^{-\alpha\beta} + \alpha z_p^2 - \frac{2z^2 z_p^2}{\alpha K_2(\alpha)} \sum_{n=0}^{2} \frac{(-\alpha)^n}{n!} [K_0^{(n)}(\alpha) + K_0^{(n+2)}(\alpha)] +$$

$$+ \frac{2z^4 z_p^2}{\alpha K_2(\alpha)} \sum_{n=0}^{2} \frac{(-\alpha)^n}{n!} K_0^{(n+2)}(\alpha) + R_\Sigma + R_{\exp} + iR_{\mathrm{Im}}, \qquad (15)$$

где

$$|R_\Sigma| \leqslant \frac{z^2 z_p^2}{\alpha\beta^4 K_2(\alpha)} \sum_{n=0}^{2} \frac{(-\alpha)^n}{n!} [K_0^{(n+4)}(\alpha) + K_0^{(n+4)}(\alpha/2)],$$

$$|R_{\exp}| \leqslant \frac{(zz_p)^2 \beta}{2\alpha K_2(\alpha)} \Big\{ \alpha e^{-\alpha\beta/2} [(2+\alpha\beta) K_0(\alpha) -$$

$$-(\alpha - \alpha^2\beta) K_0'(\alpha)] + \frac{2}{\beta} \sum_{n=0}^{2} \frac{(-\alpha)^n}{n!} K_0^{(n)} \left(3\, \frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$+ 2(1 - e^{-\alpha\beta/2})[\pi + \alpha K_0(\alpha/2)] + 4 \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha\beta}{2}\right) e^{-\alpha\beta/2} \right] \times$$

$$\times \left[\pi + \alpha K_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{4} K_0'\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] + \alpha^2 e^{-\alpha\beta/2} \left[\frac{\alpha}{2}(1+\beta) K_0''\left(\frac{\alpha}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - K_2'\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] + \pi + \frac{1}{2\beta z} \left| \ln \frac{|1-z|}{|1+z|} \right| (2 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta)\, e^{-\alpha\beta} \Big\},$$

$$|R_{\mathrm{Im}}| = -\frac{\pi}{z}(1+\alpha\beta)\, e^{-\alpha\beta}.$$

При $\alpha \to \infty$ $R_\Sigma/\alpha K_2(\alpha) \sim \alpha e^{\alpha/2}/\beta^4$, и поэтому формула (15) имеет смысл лишь при $\beta \gg 1$. Далее, при $\alpha \to 0$ $\mathrm{Im}\,\varepsilon_l \sim \alpha(\alpha\beta)^2 \exp(-\alpha\beta)$ и следует считать $\beta \gg 1/\alpha$. В этом приближении

$$\varepsilon_l = 1 - z_p^2 [a + (1-z)\, b] + \frac{i\pi\alpha z_p^2}{4(1-z) K_2(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}\right), \qquad (16)$$

где $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ определены формулами (8), (9) и изображены на рис. 1.

Используя (16) находим дисперсию и декремент затухания досветовых продольных волн:

$$\operatorname{Re}\omega = kc\left[1 + 2\left(\frac{\omega_p}{c}\sqrt{a} - k\right)c\sqrt{a}/b\omega_p\right]. \tag{17}$$

$$\gamma = \operatorname{Im}\omega = \frac{\pi a\omega_p^2 kc}{4K_2(\alpha)\left[k^2c^2 - a\omega_p^2\right]}\exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\omega^2/k^2c^2}}\right), \tag{18}$$

что отличается от результата работы [4] на множитель $a^2/a^2 = 1/D_0^2$, но при малых α (18), тем не менее, следует из формулы (3.29) и формулы (3.30) работы [4].

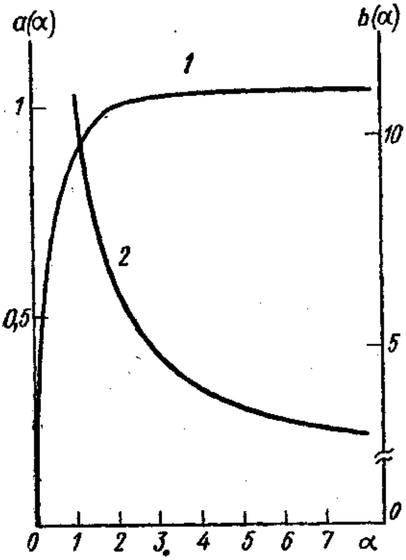

Рис. 1. Зависимость функций a (1) и b (2) от температуры ($\alpha = mc^2/\theta$)

Одновременно должны выполняться неравенства

$$\beta \gg 1;\ \alpha\beta \gg 1;\ |R_\Sigma + R_{\text{exp}}| \ll bz_p^2 \times$$
$$\times (1 - z);\ 0 < z < 1,$$

определяющие область волновых векторов, для которых формулы (17), (18) имеют смысл. Если число $N \gg 1$

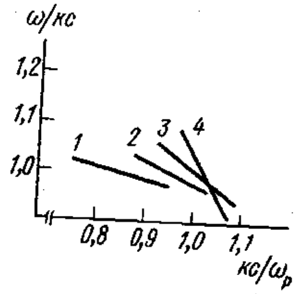

Рис. 2. Дисперсия волн с $\omega \sim kc$ при $\alpha = 0{,}5$ (1); 1 (2); 2 (3); 10 (4)

и такое, что $\alpha\beta > N$ при $\alpha \ll 1$, эта область может быть записана в виде неравенств

$$\sqrt{\alpha\ln(1/\alpha)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln 2 - C\right)\sqrt{\frac{\alpha}{\ln(1/\alpha)}} \leqslant \frac{kc}{\omega_p} <$$
$$< \sqrt{\alpha\ln(1/\alpha)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln 2 - C + \frac{6}{N^2}\right)\sqrt{\frac{\alpha}{\ln(1/\alpha)}}.$$

Графически дисперсия (17) для различных температур изображена на рис. 2.

Таким образом, полученные представления для функции диэлектрического отклика позволяют получить при ультрарелятивистских температурах дисперсию и декремент затухания волн, для которых $\omega \leqslant kc$, и, кроме того, найти области волновых векторов всех слабозатухающих продольных мод с указанными дисперсией и декрементом затухания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Силин В. П. ЖЭТФ, 1960, 38, с. 1577. [2] Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., ЖЭТФ, 1979, 76, с. 959. [3] Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., Сагдеев Р. З. ЖЭТФ, 1979, 77, с. 1951. [4] Mikhailovskii A. B. Plasma Phys., 1980, 22, p. 133. [5] Godfrey B B., Newberger B. S., Taggart K. A. IEEE Trans. Plasma Sci., 1975. PS-3, p. 60.

Поступила в редакцию
02.03.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 530.145

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

И. М. Тернов, В. Г. Багров

(кафедра квантовой теории)

§ 1. **Общие замечания о когерентных состояниях.** Когерентные состояния играют особую роль в квантовой механике как состояния, в максимально возможной полноте сохраняющие классические свойства движущейся частицы. Первый пример когерентных состояний в нерелятивистской квантовой механике был построен еще Шредингером [1]. Теория когерентных состояний нерелятивистских систем представляет собой хорошо развитый отдел квантовой механики [2]. Гораздо менее развита теория релятивистских когерентных состояний, где имеются пока лишь отдельные примеры *.

Однако даже в теории нерелятивистских когерентных состояний имеются недостаточно ясные положения, которые мы здесь хотим обсудить.

Одним из главных является вопрос об определении когерентных состояний. По-видимому, наиболее распространенным является следующее определение. Состояние когерентное, если удовлетворяя волновому уравнению, оно есть собственное состояние полного набора операторов уничтожения, являющихся интегралами движения.

Иными словами, существует полный набор операторов A_k ($k=1, 2, \ldots, n$), таких, что выполняются коммутационные соотношения

$$[A_s,\ A_k^+] = \delta_{sk}, \qquad [A_s,\ A_k] = [A_s^+,\ A_k^+] = 0.$$

Операторы A_k являются интегралами движения, и когерентное состояние $|z_k>$ — собственное для этих операторов:

$$A_k|z_k> = z_k|z_k>$$

с собственными числами z_k.

Наиболее последовательно эта точка зрения проводится в работе [2, с. 39].

Однако в работе [3] показано, что приведенное выше определение должно быть дополнено, иначе оно становится бессодержательным. Именно, можно показать [3], что любое нормированное решение уравнения Шредингера является собственным состоянием полного набора операторов уничтожения — интегралов движения. С этих позиций любое состояние — когерентное.

Поэтому к вышеприведенному определению следует сделать два дополнения. Именно, следует рассматривать полный набор когерентных

* Эти примеры и соответствующие ссылки на литературу можно найти в работах [2, 3].