СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Силин В. П. ЖЭТФ, 1960, 38, с. 1577. [2] Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., ЖЭТФ, 1979, 76, с. 959. [3] Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., Сагдеев Р. З. ЖЭТФ, 1979, 77, с. 1951. [4] Mikhailovskii A. B. Plasma Phys., 1980, 22, p. 133. [5] Godfrey B B., Newberger B. S., Taggart K. A. IEEE Trans. Plasma Sci., 1975. PS-3, p. 60.

Поступила в редакцию
02.03.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 530.145

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

И. М. Тернов, В. Г. Багров

(кафедра квантовой теории)

§ 1. **Общие замечания о когерентных состояниях.** Когерентные состояния играют особую роль в квантовой механике как состояния, в максимально возможной полноте сохраняющие классические свойства движущейся частицы. Первый пример когерентных состояний в нерелятивистской квантовой механике был построен еще Шредингером [1]. Теория когерентных состояний нерелятивистских систем представляет собой хорошо развитый отдел квантовой механики [2]. Гораздо менее развита теория релятивистских когерентных состояний, где имеются пока лишь отдельные примеры *.

Однако даже в теории нерелятивистских когерентных состояний имеются недостаточно ясные положения, которые мы здесь хотим обсудить.

Одним из главных является вопрос об определении когерентных состояний. По-видимому, наиболее распространенным является следующее определение. Состояние когерентное, если удовлетворяя волновому уравнению, оно есть собственное состояние полного набора операторов уничтожения, являющихся интегралами движения.

Иными словами, существует полный набор операторов A_k ($k=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$), таких, что выполняются коммутационные соотношения

$$[A_s,\ A_k^+] = \delta_{sk}, \qquad [A_s,\ A_k] = [A_s^+,\ A_k^+] = 0.$$

Операторы A_k являются интегралами движения, и когерентное состояние $|z_k>$ — собственное для этих операторов:

$$A_k|z_k> = z_k|z_k>$$

с собственными числами z_k.

Наиболее последовательно эта точка зрения проводится в работе [2, с. 39].

Однако в работе [3] показано, что приведенное выше определение должно быть дополнено, иначе оно становится бессодержательным. Именно, можно показать [3], что любое нормированное решение уравнения Шредингера является собственным состоянием полного набора операторов уничтожения — интегралов движения. С этих позиций любое состояние — когерентное.

Поэтому к вышеприведенному определению следует сделать два дополнения. Именно, следует рассматривать полный набор когерентных

* Эти примеры и соответствующие ссылки на литературу можно найти в работах [2, 3].

состояний (а не одно отдельно взятое состояние). Оператор уничтожения A, являющийся интегралом движения (одним из элементов полного набора A_k), должен быть таким, что любое когерентное состояние из рассматриваемого полного набора есть собственное состояние этого оператора *. Такие наборы когерентных состояний мы будем называть когерентными последовательностями. Все известные примеры когерентных состояний являются именно когерентными последовательностями. Очевидно, можно ввести частично-когерентные последовательности состояний, т. е. такие, для которых только часть операторов — интегралов движения из полного набора является операторами уничтожения.

Характерной особенностью некоторых когерентных (или частично-когерентных) состояний является следующее свойство: квантовомеханические средние (некоторых) координат являются решениями классических уравнений движения. Известно, что такая ситуация имеет место только для квадратичных по координатам и импульсам гамильтонианов.

Это действительно так, если всегда придерживаться правила: используется квантовомеханическое среднее (скалярное произведение) на плоскости $t=\text{const}$ (t — время) и средние тем самым рассматриваются как функции времени.

Однако здесь возможен более гибкий подход. При решении задач классической механики одной частицы мы нередко сталкиваемся с ситуацией, когда явное нахождение $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ затруднительно, тогда как решение задачи в параметрическом виде (u_0 — параметр)

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0), \quad t=t(u_0)$$

легко найти. Особенно типична такая ситуация в релятивистской классической механике. Это свидетельствует о том, что можно выбрать такую криволинейную систему координат u_μ ($\mu=0, 1, 2, 3$), что нахождение координат u_k ($k=1, 2, 3$) как функций u_0 окажется сравнительно простым.

Естественно ожидать, что и в квантовой механике (особенно в релятивистской) наиболее уместно перейти в криволинейную систему координат u_μ, переопределить скалярное произведение на плоскости $u_0=\text{const}$ и квантовомеханические средние вычислять как функции u_μ. Если в системе координат u_μ гамильтониан окажется квадратичным по координатам и импульсам (или хотя бы по некоторым из них), то средние этих координат как функции u_0 будут удовлетворять классическим уравнениям движения.

В частности, именно благодаря переходу к формализму «нулевой плоскости» [3] удалось найти первые частично-когерентные состояния в релятивистской квантовой механике.

Высказанные выше общие положения проиллюстрируем двумя примерами релятивистских частично-когерентных состояний.

§ 2. **Релятивистские частично-когерентные состояния электрона, движущегося в магнитном поле.** Рассмотрим движение частицы в однородном магнитном поле напряженности H, направленном по оси z. Потенциал поля выберем в виде

$$A_x=-Hy, \tag{1}$$

* Иначе, если φ_1 и φ_2 — различные состояния из полного набора, то тем не менее они являются собственными состояниями одного и того же оператора A:

$$A\varphi_1=z_1\varphi_1, \quad A\varphi_2=z_2\varphi_2.$$

Сам оператор A не зависит от состояния.

остальные компоненты равны нулю. Известно, что в таком поле релятивистская частица движется по винтовой линии [4]. Вводя переменные «нулевой плоскости»

$$u_0=ct-z, \quad u_1=x_1, \quad u_2=x_2, \quad u_3=ct+z, \tag{2}$$

найдем решения классических релятивистских уравнений Лоренца в следующем виде:

$$\begin{aligned} &u_1 = R\cos(\omega u_0+\varphi)+u_1^0, \qquad u_2=\varepsilon R\sin(\omega u_0+\varphi)+u_2^0, \\ &u_3=(m^2+R^2\gamma^2)\lambda^{-2}u_0+u_3^0, \quad u_0=\lambda m^{-1}\tau-u_3^0,\ \omega=\gamma\lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

В формулах (3) $R, \varphi, \lambda; u_1^0, u_2^0, u_3^0$ — постоянные (интегралы движения), причем u_1^0 и u_2^0 задают координаты центра окружности, R — радиус окружности, φ — начальная фаза, τ — интервал. Введены также обозначения

$$\gamma=|eH|(c\hbar)^{-1}, \quad \lambda=(E-cP_3)(c\hbar)^{-1},\ m=m_0c\hbar^{-1}, \tag{4}$$

где E — энергия частицы, P_3 — импульс вдоль оси z, λ является интегралом движения; $\varepsilon=1$ соответствует электрону $(e<0)$, $\varepsilon=-1$ — позитрону $(e>0)$. Частота вращения по окружности Ω, энергия частицы E и импульс P_3 вдоль оси z имеют следующие выражения:

$$\Omega=\frac{2c\gamma\lambda}{m^2+\gamma^2R^2+\lambda^2}, \quad \frac{E}{m_0c^2}=\frac{m^2+\gamma^2R^2+\lambda^2}{2m\lambda},$$

$$P_3=h\frac{m^2+\gamma^2R^2-\lambda^2}{2\lambda}.$$

Вычисляя обобщенный импульс вдоль оси x, найдем

$$p_x=-\hbar k_1=\hbar m\dot{u}_1+ec^{-1}A_x=\hbar(m\dot{u}_1+\varepsilon\gamma u_2)=\varepsilon\hbar\gamma u_2^0,$$

т. е. p_x есть интеграл движения и характеризует y-координату центра окружности.

В квантовой теории волновую функцию выберем собственной для операторов $\hat{\lambda}$ и $\hat{k}_1$:

$$\hat{\lambda}=2i\partial_3, \quad \hat{k}_1=i\partial_1, \quad \partial_\mu=\partial/\partial u_\mu, \tag{5}$$

откуда получим

$$\Psi=N\exp(-i\lambda u_3/2-ik_1u_1)\Phi(u_0, u_2).$$

В случае скалярной частицы из уравнения Клейна — Гордона для функции Φ найдем

$$2i\lambda\partial_0\Phi=[m^2+(k_1+\varepsilon\gamma u_2)^2-\partial_{22}]\Phi. \tag{6}$$

Обычно, находя стационарные состояния частицы, выбирают в качестве третьего интеграла движения оператор

$$\hat{\varkappa}=2i\partial_0, \quad \hat{\varkappa}\Psi=\varkappa\Psi, \tag{7}$$

при этом совместное решение (6) и (7) приводит к известным стационарным волновым функциям бесспиновой релятивистской частицы в однородном магнитном поле, которые в координатах (2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\Psi=\Psi_n=N\exp(-i\lambda u_3/2-i(m^2+\gamma)u_0/2\lambda-in\omega u_0-ik_1u_1)U_n(\sqrt{\gamma}u_2+ \\ &+\varepsilon k_1/\sqrt{\gamma}), \quad \lambda\varkappa=m^2+(2n+1)\gamma, n=0,\ 1,\ 2\ \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $U_n(x)$ — функции Эрмита, связанные с полиномами Эрмита $H_n(x)$ соотношением

$$U_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-1/2} \exp(-x^2/2)\, H_n(x).$$

Величина $\varkappa$ связана с энергией E и импульсом P_3 соотношением

$$c\hbar\varkappa = E + cP_3 = c\hbar\lambda + 2cP_3,$$

откуда получаем, с учетом (8), что P_3 — интеграл движения и имеет место известная формула квантования энергии

$$E^2 = m_0^2c^4 + c^2P_3^2 + 2|eH|c\hbar(n+1/2).$$

Однако нетрудно убедиться, что уравнение (6) допускает интеграл движения $\hat{A}$:

$$\sqrt{2\gamma}\,\hat{A} = (\partial_2 + \gamma u_2 + \varepsilon k_1)\exp(i\omega u_0), \tag{9}$$

являющийся оператором уничтожения. Требуя, чтобы Ψ была собственной для $\hat{A}$, найдем для Φ

$$\sqrt{2\gamma}\,\hat{A}\Phi = z\Phi, \tag{10}$$

где z — комплексное число. Совместное решение (6) и (10) приводит к частично-когерентным состояниям бесспиновой частицы в магнитном поле

$$\begin{gathered}\Psi_z = N\exp(Q/2), \quad Q = -\gamma u_2^2 + 2[z\exp(-i\omega u_0) - \\ -\varepsilon k_1]u_2 - 2\varepsilon k_1 z\gamma^{-1}[1 - \exp(-i\omega u_0)] + \\ + z^2(2\gamma)^{-1}[1 - \exp(-2i\omega u_0)] - i(m^2+\gamma)\lambda^{-1}u_0 - i\lambda u_3 - 2ik_1u_1.\end{gathered} \tag{11}$$

Вычисляя по функциям (11) среднее значение $\bar{u}_2$ с использованием скалярного произведения на «нулевой плоскости» [3], найдем

$$\gamma\bar{u}_2 = \delta\cos(\omega u_0 - \mu) - \varepsilon k_1, \quad z = \delta\exp(i\mu), \tag{12}$$

где мы ввели модуль δ и аргумент μ комплексного числа z. Сравнение (12) и (3) приводит к выводу, что $\bar{u}_2$ совпадает с соответствующим классическим выражением, причем имеют место соотношения

$$k_1 = -\varepsilon\gamma u_2^0, \;\; \delta = \gamma R, \;\; \mu = \varepsilon\frac{\pi}{2} - \varphi, \;\; z = i\varepsilon\gamma R\exp(-i\varphi).$$

Величину Q из (11) теперь можно записать в виде

$$\begin{gathered}Q = -\gamma(u_2 - \bar{u}_2)^2 + 2\gamma(R\sin\varphi + \varepsilon u_2^0)^2 + i\Phi^0, \\ \Phi^0 = 2\lambda\bar{u}_2'(u_2 - \bar{u}_2) + \lambda\bar{u}_2'(\bar{u}_2 - u_2^0) + \gamma R(R\sin\varphi + 2\varepsilon u_2^0)\cos\varphi - \\ -\lambda u_3 - 2k_1u_1 - (m^2 + \gamma)\lambda^{-1}u_0.\end{gathered} \tag{13}$$

Отметим также соотношение

$$\bar{u}_2'(\bar{u}_2 - u_2^0) = 2\int L\,du_0, \quad 2L = Y'^2 - \omega^2Y^2, \;\; Y = \bar{u}_2 - u_2^0,$$

где L — эффективный лангранжиан одномерного движения по y (штрихом обозначили производную по u_0).

Из (13) следует, что волновые функции (11) представляют собой волновой пакет с эффективной шириной $\sim 1/\sqrt{\gamma}$, сосредоточенный в окрестности классической траектории $\bar{u}_2$, не расплывающийся с течением времени.

Наконец отметим, что стандартным приемом [2] из функций Ψ_z при каждом фиксированном z порождается полный ортогональный (на «нулевой плоскости») набор решений уравнения Клейна — Гордона

$$\Psi_{nz} = (n!)^{-1/2} (B^+)^n \Psi_z, \quad B = A - z/\sqrt{2\gamma}, \quad \Psi_{0z} = \Psi_z, \tag{14}$$

причем среднее $\bar{u}_2$ по функциям (12) не зависит от n и совпадает с (12).

Простым расчетом (с использованием скалярного произведения на «нулевой плоскости») получим

$$4\,\overline{\Delta p_y^2}\,\overline{\Delta y^2} = \hbar^2, \tag{15}$$

т. е. частично-когерентные состояния (11) обеспечивают минимум этого соотношения неопределенности во все моменты «времени u_0».

Несложно найти следующее разложение:

$$\Psi_z = \sum_n c_n \Psi_n, \quad c_n = z^n/\sqrt{n!}\,,$$

в полном согласии с общими свойствами когерентных состояний [2].

Состояния Ψ_z обладают еще одним замечательным свойством. Устремляя $\gamma \to 0$ (т. е. устремляя к нулю магнитное поле), получаем непрерывный переход к состояниям свободно движущегося электрона с заданным четырехмерным импульсом *. Действительно, полагая при $\gamma \to 0$ $z = \varepsilon k_1 - ik_2$, где k_2 — вещественное число, задающее импульс вдоль y, и учитывая, что

$$\lim_{\gamma\to 0} Q = -2ik_2u_2 - i\,(m^2 + k_1^2 + k_2^2)\,\lambda^{-1}\,u_0,$$

найдем волновую функцию бесспиновой частицы при $\gamma \to 0$:

$$\Psi = N_0 \exp(-iT),$$

$$T = (m^2 + k_1^2 + k_2^2 + \lambda^2)\,(2\lambda)^{-1}\,ct + k_1x + k_2y -$$

$$- (m^2 + k_1^2 + k_2^2 - \lambda^2)\,(2\lambda)^{-1}\,z.$$

Задача о нахождении волновых функций электрона в магнитном поле, допускающих непрерывный переход к волновым функциям свободной частицы, исследовалась неоднократно. Такие состояния найдены были, например, в [5] (там же можно найти ссылки на литературу). Однако во всех ранее известных случаях состояния характеризовались хотя бы одним дискретным квантовым числом, которое следовало определенным образом устремлять к ∞ при $H \to 0$. Найденные здесь частично-когерентные состояния Ψ_z характеризуются только непрерывными квантовыми числами и допускают переход $H \to 0$ без дополнительных условий.

Частично-когерентные состояния Ψ_{Dz}, удовлетворяющие уравнению Дирака, можно получить, пользуясь общим приемом, изложенным в [3]. Они имеют вид (см. [3])

$$\Psi_{Dz} = N \exp(Q/2)\,\mathscr{K} \exp(-i\omega\sigma_3 u_0/2)\,v_0, \tag{16}$$

где v_0 — произвольный двумерный постоянный спинор; оператор $\mathscr{K}$ зададим в следующем «блочном виде»:

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} m + \lambda - \sigma_3\,(\sigma\,\mathbf{F}) \\ (m - \lambda)\,\sigma_3 - (\sigma\,\mathbf{F}) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

---

* При таком переходе состояния перестают быть частично-когерентными, поскольку оператор (9) при $\gamma \to 0$ теряет смысл.

где вектор $\mathbf{F}$ имеет отличные от нуля x- и y-компоненты, которые в нашем случае имеют вид

$$\mathbf{F}=\{k_1+\varepsilon\gamma u_2, \quad iz\exp(-i\omega u_0)-i\varepsilon(k_1+\varepsilon\gamma u_2)\}.$$

Средние, найденные на «нулевой плоскости» по функциям (16), по-прежнему приводят к выражениям (12), (15).

§ 3. **Частично-когерентные состояния релятивистской частицы, движущейся в поле плоской электромагнитной волны.** В переменных (2) зададим потенциалы плоской волны в виде

$$A_0=0,\ \mathbf{A}=c\hbar|e|^{-1}\mathbf{f}(u_0), \quad \mathbf{f}=(f_1, f_2, 0),$$

где $\mathbf{f}(u_0)$ — произвольно зависящий от u_0 двумерный вектор. Как известно, классическая [4] и квантовая [6, 7] задачи в этом случае решаются в квадратурах при любом $\mathbf{f}$.

Величина λ (4), (5) является и здесь интегралом движения. Легко установить, что в квантовой механике интегралами движения являются следующие два взаимно коммутирующих оператора уничтожения (мы их запишем в виде одного двумерного вектора $\widehat{\mathbf{B}}$ с компонентами 1 и 2):

$$\sqrt{2}\,\widehat{\mathbf{B}}=m\mathbf{u}_1+(m^{-1}+im\lambda^{-1}u_0)\nabla_\perp-\varepsilon m\lambda^{-1}\int\mathbf{f}(u_0)\,du_0. \tag{18}$$

Будем искать состояния, собственные для операторов $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ *:

$$\widehat{\lambda}\Psi=\lambda\Psi, \quad \sqrt{2}\,\widehat{\mathbf{B}}\Psi=\boldsymbol{\alpha}\Psi,\ \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+i\boldsymbol{\alpha}_2,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ — вещественные двумерные векторы. Решение уравнения Клейна — Гордона имеет в этом случае вид

$$\begin{gathered}\Psi_\alpha=N(\lambda+im^2u_0)^{-1}\exp(\overline{Q}/2), \quad \overline{Q}=-\lambda(\lambda-im^2u_0)(m\mathbf{u}-\mathbf{p})^2\times\\ \times(\lambda^2+m^4u^2)^{-1}-i\left(m^2u_0+\int\mathbf{f}^2\,du_0\right)\lambda^{-1}-i\lambda u_3=-Q_1+iQ_2,\\ Q_1=\lambda^2(m\mathbf{u}-\mathbf{q})^2(\lambda^2+m^4u_0^2)^{-1},\ Q_2=\lambda m^2u_0[m\mathbf{u}-\mathbf{q}+\\ +(\lambda^2+m^4u_0^2)(\lambda m^2u_0)^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2]^2(\lambda^2+m^4u_0^2)^{-1}-\lambda(m^2u_0)^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2^2-\\ -\left(m^2u_0+\int\mathbf{f}^2\,du_0\right)\lambda^{-1}-\lambda u_3,\ \mathbf{p}=\boldsymbol{\alpha}+\varepsilon m\lambda^{-1}\int\mathbf{f}(u_0)\,du_0,\\ \mathbf{q}=\boldsymbol{\alpha}_1+\varepsilon m\lambda^{-1}\int\mathbf{f}(u_0)\,du_0+m^2\lambda^{-1}u_0\boldsymbol{\alpha}_2.\end{gathered} \tag{19}$$

Решение уравнения Дирака запишется аналогично (16), а именно

$$\Psi_{D\alpha}=N(\lambda+im^2u_0)^{-1}\exp(\overline{Q}/2)\,\mathscr{K}v_0, \tag{20}$$

где оператор $\mathscr{K}$ определен формулой (17), в которой следует теперь положить

$$\mathbf{F}=-\varepsilon\mathbf{f}-\lambda m(m^2u_0+i\lambda)(m\mathbf{u}-\mathbf{p})(\lambda^2+m^4u_0^2)^{-1}.$$

Средние на «нулевой плоскости» по функциям (19), (20) приводят к классическим выражениям

$$\overline{\mathbf{u}}_\perp=m^{-1}\mathbf{q}, \quad \overline{\mathbf{p}}_\perp=\hbar(m\boldsymbol{\alpha}_2+\varepsilon\mathbf{f}),$$

---

* В ином виде частично-когерентные состояния в поле плоской волны были получены в работах [8—10].

а соотношение неопределенностей (15) теперь имеет вид

$$4\,\overline{\Delta u_k^2}\;\overline{\Delta p_k^2} = \hbar^2 (1 + m^4 \lambda^{-2} u_0^2),\; k = 1, 2,$$

и минимально только в «начальный момент» $u_0 = 0$. Это связано с тем, что, как это видно из (19), волновой пакет хотя и сосредоточен в окрестности классической траектории, однако здесь его ширина с течением времени возрастает пропорционально $m^{-1}(1+m^4\lambda^{-2}u_0)^{1/2}$, т. е. пакет расплывается.

Переходя к пределу $f \to 0$ в (19), (20), получим непрерывный переход к частично-когерентным состояниям свободного электрона; при этом операторы (18) сохраняют свой смысл.

Рассмотренные примеры наглядно иллюстрируют тот факт, что в общем случае возможны два типа когерентных состояний — либо волновой пакет сосредоточен во все моменты времени в окрестности классической траектории и не расплывается (вообще говоря, это исключительные случаи), либо с течением времени (как правило) расплывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Schrödinger E. Naturwiss., 1926, 14, p. 664. (Русский перевод: Э. Шредингер. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976, с. 51.) [2] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979. [3] Квантовая электродинамика с внешним полем. Сб. статей. Изд. Томского ун-та. Томск, 1977. [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. [5] Janussis A. Zeit. Phys., 1966, 190, p. 129. [6] Volkov D. M. Zeit. Phys., 1935, 94, p. 250. [7] Волков Д. М. ЖЭТФ, 1937, 7, с. 1286. [8] Багров В. Г., Бухбиндер И. Л., Гитман Д. М. Деп. ВИНИТИ № 924—76 Деп. [9] Bagrov V. G., Buchbinder I. L., Gitman D. M. J. Phys., 1976, A9, p. 1955. [10] Dodonov V. V., Malkin I. A., Man'ko V. I. Physica, 1976, A82, p. 113.

Поступила в редакцию
05.03.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 621.374.4

ВНЕШНЕЕ ФАЗОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА НЕЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ДЕЛИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ

Л. В. Балакин, В. И. Медведев

(кафедра физики колебаний)

Основной отличительной особенностью рассмотренных ранее [1—6] электромеханического и электрического фазочувствительных нелинейно-параметрических делителей частоты в большое число раз в одном каскаде является выполнение для них фазового условия когерентности исходного и «поделенного» колебаний. Это означает, что такие делители частоты кроме значительно более высокой кратности деления m на один каскад по сравнению с делителями на триггерных схемах и блокинг-генераторах обладают также возможностью **деления фазы** исходного гармонического колебания в m раз. При этом естественно возникает вопрос о переходных процессах в таких системах, т. е. о поведении амплитуды и фазы поделенного колебания во времени при различных законах изменения внешнего фазового воздействия на нелинейно-параметрический (НП) делитель частоты, которое может быть регулярным или паразитным. Рассмотрим поведение НП делителя