УДК 532.5.013.2

О ЗАКОНЕ ДВИЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ТЕОРИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Д. В. Скрипкин

(кафедра математики)

В одномерных задачах гидромеханики три соотношения Гюгонио связывают значения семи величин — скорости частиц v_1, v_2, плотности ρ_1, ρ_2, давления p_1, p_2 по разные стороны поверхности ударной волны и скорость перемещения фронта ударной волны $D=\frac{dr^*(t)}{dt}$. Начальные условия в задаче о точечном взрыве задают при $t=0$ состояние невозмущенной среды, т. е. функции $v_1(r)$, $\rho_1(r)$, $p_1(r)$ с внешней стороны ударной волны. Поскольку из трех соотношений Гюгонио невозможно определить D и значения функций v_2, ρ_2, p_2 на внутренней поверхности ударной волны, приходится дополнительно привлекать закон сохранения энергии в интегральной форме (например, для идеального газа):

$$\mathscr{E}(t)+4\pi\int\limits_0^{r^*(t)}\left(\frac{p_1}{\gamma-1}-\rho_1 r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)r^2\,dr=$$

$$=4\pi\int\limits_0^{r^*(t)}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}-\rho r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)r^2\,dr, \qquad (1)$$

в который входит радиус ударной волны $r^*(t)$. В уравнении (1) $\varphi(t, r)$ — гравитационный потенциал, γ — отношение удельных теплоемкостей, $\mathscr{E}(t)$ — количество выделившейся энергии в точке $r=0$ к моменту времени t. Задачу принято называть задачей о взрыве, если $\mathscr{E}(0)=E_0>0$, $\mathscr{E}(t)=0$ при $t>0$.

Чтобы воспользоваться интегральным соотношением (1), надо найти значения функций v, p, ρ, φ во всех точках области возмущенного движения газа. В общем случае преодолеть этот барьер не удается, не прибегая к различным аппроксимациям закона движения ударной волны с использованием экспериментальных данных или асимптотических закономерностей для зависимости функции v_2 от $r^*(t)$ [1]. В частности, в автомодельной постановке задачи о сильном взрыве [2] закон движения ударной волны оказывается известным с точностью до произвольной мультипликативной константы, значение которой в последующем определяется из уравнения (1). Благодаря этому задача нахождения функций v, ρ, p в возмущенной области может быть приведена к задаче с начальными данными Коши v_2, ρ_2, p_2 на известном начальном многообразии $r=r^*(t)$.

Покажем, что если в число определяющих параметров на фронте ударной волны дополнительно включить массу вовлеченного в возмущенное движение вещества, то, основываясь на данном предположении, можно в общем случае с точностью до произвольной постоянной определить закон движения ударной волны в задаче о точечном взрыве.

В самом деле, из соотношений Гюгонио следует, что

$$D^2=\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}\cdot\frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (2)$$

Если вместо p_2-p_1 в (2) подставить вытекающее из уравнений ударной адиабаты для идеального газа выражение

$$p_2-p_1=\frac{2\gamma p_1}{\gamma-1}\cdot\frac{\rho_2-\rho_1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1-\rho_2\right)}, \tag{3}$$

то получим

$$D^2=\frac{2\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1}\cdot\frac{1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}-1}. \tag{4}$$

Заметим, что $D^2=\gamma p_1/\rho_1$, когда $\rho_2=\rho_1$ и $D^2\to\infty$, когда $\rho_2\to\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1$.

Допустим теперь, что ρ_2 зависит от следующих определяющих параметров: ρ_1, p_1, энергии взрыва E_0 и массы вовлеченного в движение газа m. Тогда из общих соображений теории размерности вытекает, что ρ_2/ρ_1 может зависеть только от безразмерной комбинации mP_1/ρ_1E_0. Учитывая, что должны выполняться следующие предельные соотношения:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\to\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\ \text{при}\ \frac{m}{E_0}\to 0;\quad \frac{\rho_2}{\rho_1}\to 1\ \text{при}\ \frac{m}{E_0}\to\infty,$$

а также что в соответствии с автомодельным случаем для сильного взрыва

$$D^2\sim 1/r^\nu,\qquad \nu=1,\,2,\,3,$$

при малых значениях $r^*(t)$, мы почти однозначно можем положить

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\cdot\frac{1+C\dfrac{(\gamma-1)mp_1}{\rho_1E_0}}{1+C\dfrac{(\gamma+1)mp_1}{\rho_1E_0}}, \tag{5}$$

чтобы удовлетворить всем перечисленным требованиям (здесь C — безразмерная медленно меняющаяся функция того же аргумента m). Подставив в (4) вместо ρ_1/ρ_2 его выражение по формуле (5), получим

$$D^2=\frac{\gamma E_0}{(\gamma-1)Cm}+\gamma\frac{p_1}{\rho_1}, \tag{6}$$

и, таким образом, D^2 оказывается равным сумме квадрата скорости звука и члена, обратно пропорционального массе m, заключенной внутри ударной волны. Выражения для $p_1(r^*(t))$, $\rho_1(r^*(t))$ известны из начальных условий, а

$$m=4\pi\int_0^{r^*(t)}\rho_1(r)\,r^2\,dr\quad \text{при}\ \nu=3;$$

$$m=2\pi\int_0^{r^*(t)}\rho_1(r)\,r\,dr\quad \text{при}\ \nu=2;$$

$$m=\int_0^{r^*(t)}\rho_1(r)\,dr\quad \text{при}\ \nu=1.$$

Полагая $D=\frac{dr^*(t)}{dt}$, придем к следующему уравнению для закона движения ударной волны:

$$t=\int_0^{r^*}\frac{dr}{\sqrt{\frac{\gamma E_0}{(\gamma-1)Cm}+\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}},\qquad (7)$$

В частном случае, когда $p_1=\mathrm{const}$, $\rho_1=\mathrm{const}$ и поэтому $m=\frac{4}{3}\pi\rho_1 r^3$, (7) переходит в соотношение

$$t=\int_0^{r^*}\frac{r^{3/2}\,dr}{\sqrt{\frac{3\gamma E_0}{4\pi(\gamma-1)\rho_1 C}+\frac{\gamma p_1}{\rho_1}r^3}}.\qquad (8)$$

В работе [1] на основе асимптотической зависимости v_2 от $r^*(t)$ для рассмотренного частного случая получена следующая формула:

$$t=\int_0^{r^*}\frac{r^{3/2}\,dr}{1+\sqrt{A+Br^3}}.$$

Для автомодельного движения, вызванного сильным взрывом [2], формулы (6) и (8) точно соответствуют закону движения ударной волны. Количественное сравнение зависимости (6) (при $C=\mathrm{const}$) с таблицей рассчитанных значений D для неавтомодельных движений [1] показало расхождение в пределах 10% для больших значений $r^*(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. [2] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
11.06.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 4

УДК 532.73:536.42

КОЭФФИЦИЕНТ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ СИСТЕМЫ НИТРОБЕНЗОЛ — ГЕПТАН

С. В. Казаков, Н. И. Чернова

(кафедра молекулярной физики)

Измерения коэффициента взаимной диффузии или времени релаксации флуктуаций концентрации в бинарных смесях с критической концентрацией показывают, что поведение этих величин в окрестности критической температуры описывается степенными законами [1]. Однако до сего времени нет единого мнения о характере температурной и концентрационной зависимостей диффузии в широком интервале указанных переменных. Имеющиеся в литературе экспериментальные данные о деталях степенных зависимостей, определяющих свойства коэффициента взаимной диффузии D в области критической точки расслаивания, противоречивы. Например, по данным работы [2] крити-