ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 517.788:538.3

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПОЛЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Б. А. Володин, А. М. Хапаев

(кафедра математики)

Взаимодействие релятивистских заряженных частиц с полем циркулярно поляризованной электромагнитной волны в присутствии постоянного магнитного поля лежит в основе анализа работы ряда электронных приборов СВЧ, а также существенно при решении вопросов, связанных с исследованием плазмы. Однако нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие движение и изменение энергии частиц, анализируются обычно с помощью численных методов интегрирования. Попытки получить аналитическую зависимость энергии частицы от времени предпринимались рядом авторов [1, 2].

В данной работе приводится метод решения задачи о зависимости энергии частицы от координаты при взаимодействии с электромагнитными полями. Предполагается, что заряженные частицы, двигаясь по винтовым траекториям в статическом магнитном поле, начиная с $z_н=t_н=0$, пересекают область существования электромагнитного поля плоской волны (область взаимодействия). Изменение высокочастотного поля в поперечном направлении учитывать не будем и построим решение задачи о зависимости энергии частицы от координаты при общих (нерезонансных) условиях по частоте.

Пусть электромагнитные поля задаются в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}'(\xi),\ \mathbf{H} = -\frac{1}{c\beta_\Phi}[\mathbf{nE}] + \mathbf{H}_0,\ \mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{n},$$

$$\mathbf{A}(\xi) = -\frac{cE_0}{\omega}(\sin\omega\xi\cdot\mathbf{i} - g\cos\omega\xi\cdot\mathbf{j}),\ \xi = t - \frac{1}{\beta_\Phi}\frac{z}{c},$$

$\mathbf{n}$ — единичный вектор оси z, c — скорость света, ω — частота, E_0 — амплитуда, β_Φ — фазовая скорость волны, $g=\pm1$ — показатель поляризации.

Решается релятивистское уравнение для частицы с импульсом $\mathbf{P}$, массой m_0, зарядом e_0, скоростью $\mathbf{v}$ и уравнение изменения энергии W:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e_0}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{vE})}{c^2}\right\},$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e_0}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(\mathbf{PA}).$$

Следуя методу решения подобных задач при $\beta_\Phi=1$, изложенному в работах [4, 5], получим интегралы движения, совпадающие с приведенными в работах [1—3],

$$\alpha = \frac{1-\beta_\parallel\beta_\Phi}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \mathbf{P} - \frac{e_0}{c}\mathbf{A} - \mathbf{n}(\mathbf{nP}) - \frac{e_0H_0}{c}[\mathbf{rn}] = \mathbf{P}_0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{P}_0 = P_{01}\mathbf{i} + P_{02}\mathbf{j}$ —

константа, которая определяется из начальных условий $(t_н = z_н = 0)$

$$x = R_0 \cos\varphi,\ y = R_0 \sin\varphi,\ \beta_x = \beta_{\perp 0} \sin\varphi,\ \beta_y = -\beta_{\perp 0}\cos\varphi,\ \beta_\parallel = \beta_{\parallel 0}.$$

При использовании интегралов движения задача определения закона изменения энергии заряженной частицы сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} x' = \omega_1\left(\frac{P_{01}}{m_0\omega_0} - y - \varepsilon\frac{c}{\omega}\sin\omega\xi\right), \\ y' = \omega_1\left(\frac{P_{02}}{m_0\omega_0} + x + g\varepsilon\frac{c}{\omega}\cos\omega\xi\right), \\ (\omega_1^{-1})' = \frac{1-\beta_\Phi^2}{c\beta_\Phi^2}\varepsilon(x'\cos\omega\xi + gy'\sin\omega\xi), \end{gathered} \tag{1}$$

где штрихом обозначена производная по $\xi, \beta_z = \dfrac{1}{c}\dfrac{dz}{d\xi}$, $\varepsilon = \dfrac{E_0}{H_0}$, ω_1 — частота, определяющая вращение в плоскости XY и связанная с энергией W и β_z соотношением

$$W = \frac{m_0c^2}{1-\beta_\Phi^2}\alpha\left(1 - \beta_\Phi^2\frac{\omega_{11}}{\omega_1}\right),\ \omega_1 = \omega_{11}\left(1 + \frac{1-\beta_\Phi^2}{\beta_\Phi}\beta_z\right),$$

$$\omega_0 = \frac{e_0H_0}{m_0c},\ \omega_{11} = \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

Используя полученную систему уравнений (1) и принимая во внимание периодичность функции ω_1, приходим к дифференциальному уравнению для w, связанному с ω_1 соотношением $w = 1 - g\omega/\omega_1$:

$$\frac{4}{\omega^2}[(1-w)w']^2 = F(w) - \left\{F(w) - \frac{4}{\omega^2}[(1-w)w']^2\right\}_{\xi=\xi_н}, \tag{2}$$

$$F(w) = -\frac{1}{4}w^4 + \frac{1}{2}\left(w_0^2 - 2\varepsilon^2\frac{1-\beta_\Phi^2}{\beta_\Phi^2} - \right.$$

$$\left. - 2\varepsilon\frac{1-\beta_\Phi^2}{\beta_\Phi^2}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\beta_{\perp 0}}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\cos\varphi\right)w^2 + 2\varepsilon^2\frac{1-\beta_\Phi}{\beta_\Phi^2}w,\ w|_{\xi=\xi_н} = w_н.$$

Определение корня полинома в правой части дифференциального уравнения (2) зависит от выбора нижнего предела ($\xi_н$) при интегрировании по ξ. Для нахождения $\xi_н$, при котором $[(1-w)w']^2/\omega^2$ обращается в ноль, рассмотрим

$$w' = M(x'\cos\omega\xi + gy'\sin\omega\xi),\ M = -g\varepsilon\frac{1-\beta_\Phi^2}{\lambda\beta_\Phi^2}.$$

Заменяя в w' x' и y' с помощью второго интеграла движения (1) на x и y, приводим w' к виду

$$w' = M\omega_1\sqrt{a^2+b^2}\sin(\psi + \omega\xi)/c,\ \psi = \operatorname{arctg}(a/b) + m\pi,$$

$$a = P_{01}/(m_0\omega_0) - y,\ b = P_{02}/(m_0\omega_0) + x.$$

Условие $w'=0$ соответствует тому, что нижний предел при интегрировании по ξ необходимо положить равным φ/ω. Аналогично определяются постоянные при решении механических задач, сводящихся к уравнениям для эллиптических функций.

Равенство нулю $[(1-w)w']^2/\omega^2$ при $\xi=\xi_н$ приводит к тому, что корень полинома w_0 определяется тривиально.

Условие

$$w_0 = 1 - \frac{\omega}{\omega_{10}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_{11}} \frac{1-\beta_{\parallel}/\beta_ф}{1-\beta_{\parallel}\beta_ф} = 0, \quad \omega = \omega_1|_{z=0} = \omega_{10}, \; g = 1$$

соответствует условию резонанса с полем волны при движении частицы, имеющей компоненту скорости вдоль направления распространения волны [2].

Заменяя в (2) дифференцирование по ξ на производную по z, имеем

$$\left(\frac{\lambda\beta_ф}{1-\beta_ф^2}\right)^2 \left\{\left[\left(1-\frac{\omega}{\omega_{11}}\right) - w\right]\dot{w}\right\}^2 = G(w). \tag{3}$$

Здесь $G(w)$, так же как и в (2), полином четвертой степени относительно w:

$$G(w) = b_4 w^4 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0,$$

где коэффициенты определяются следующими формулами:

$$b_0 = -b_4 w_0^4 - b_2 w_0^2 - b_1 w_0, \quad b_1 = 2\varepsilon^2 \frac{1-\beta_ф^2}{\beta_ф^2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(w_0^2 - b_1 - g\frac{b_1}{\varepsilon}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\beta_{\perp 0}}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\cos\varphi\right), \quad b_4 = -\frac{1}{4}.$$

Замена $w=w_0+1/\eta$ в уравнении (3), где w_0 — корень полинома четвертой степени $G(w)$, позволяет свести полином к кубическому [7]. Вторичная замена функции в уравнении (3)

$$\eta = h - a_1/3, \quad a_1 = (6b_4 w_0^2 + b_2)/(4b_4 w_0^3 + 2b_2 w_0 + b_1)$$

приводит кубический полином в правой части (3) к каноническому виду Вейерштрасса [6, 7]

$$G(h) = 4h^3 - g_2 h - g_3.$$

Инварианты g_2, g_3 полинома определяются выражениями

$$g_2 = -4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 + 4\frac{b_4 w_0}{q_2}\right], \quad q_1 = 4b_4 w_0^4 + 2b_2 w_0 + b_2,$$

$$g_3 = -4\left[\frac{2}{27}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^3 - \frac{4b_2 w_0 q_1}{q_2^2} + \frac{b_4}{q_2}\right], \quad q_2 = 4b_4 w_0^3 + 2b_2 w_0 + b_1.$$

С учетом сделанных замен уравнение (2) после преобразования пределов интегрирования сводится к интегральному уравнению

$$z = q_0 \int_h^\infty \frac{h+\delta_1}{h+\delta_0} \frac{dh}{\sqrt{4h^3 - g_2 h - g_3}}, \tag{4}$$

где

$$\delta_0 = -\frac{(6b_4w_0^2 + b_2)}{3q_2}, \quad \delta_1 = \delta_0 + \frac{1}{\omega/\omega_{11} - \omega/\omega_{10}},$$

$$q_0 = \frac{2\lambda\beta_\Phi}{(1-\beta_\Phi^2)\sqrt{q_2}}\left(\frac{\omega}{\omega_{11}} - \frac{\omega}{\omega_{10}}\right).$$

Для решения интегрального уравнения (4) воспользуемся стандартной заменой, следующей из теории функций Вейерштрасса. Введем новую переменную u, связанную с h интегралом

$$u = \int_h^\infty \frac{dh}{\sqrt{4h^3 - g_2h - g_3}}.$$

Тогда

$$h = \wp(u), \quad \wp(u) = \sqrt{4h^3 - g_2h - g_3}, \quad dh = \wp'(u)\,du$$

и интеграл (4) принимает вид

$$z = q_0\int_0^u \frac{\wp(u) + \delta_1}{\wp(u) + \delta_0}\,du. \tag{5}$$

Интегрируя правую часть (5), получаем

$$z = q_0\left\{u - \frac{\delta_0 - \delta_1}{\wp'(v)}\left[\ln\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - \ln 2\sigma(v) - 2\zeta(v)\,u\right]\right\},$$

$\wp(v) = -\delta_0$, $\sigma(v)$, $\zeta(v)$ — функция Вейерштрасса от постоянного аргумента. Это равенство выражает координату заряженной частицы z как функцию от аргумента u.

Закон изменения w в зависимости от u представится в виде

$$w = w_0 + 1/(\wp(u) + \delta_0),$$

а зависимость энергии W от u определится равенством

$$W = \frac{m_0c^2}{1-\beta_\Phi^2}\alpha\left\{1 - \beta_\Phi^2\frac{\omega_{11}}{\omega_{10}}\left(1 - \frac{1}{\wp(u) + \delta_0}\right)\right\}. \tag{6}$$

В качестве конкретного примера приложения полученного выражения для изменения энергии электрона (6) рассмотрим длительное взаимодействие электронов с электромагнитным полем. Для этого необходимо выполнение условия фазового синхронизма, т. е. приблизительного равенства скорости электрона $\beta_{\parallel 0}$ и фазовой скорости волны β_Φ.

Пусть $\beta_\Phi - \beta_{\parallel 0} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \ll 1$, $g = 1$. Следовательно,

$$\delta_1 - \delta_0 = \varepsilon_1/[\beta_\parallel(1-\beta_\Phi^2)],$$

и можно приближенно записать

$$z \approx q_0u, \quad u = \varepsilon\varepsilon_1(1-\beta_\Phi^2)^{1/2}/(\sqrt{2}\lambda\beta_\Phi^2\beta_{\parallel 0}).$$

Как следствие принятого условия фазового синхронизма определитель $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ уравнения $\wp(u)$ в форме Вейерштрасса равен нулю. Равенство нулю определителя соответствует тому, что все корни полинома $G(h)$ вещественны и два из них равны между собой. При принятых условиях функция Вейерштрасса может быть представлены в виде [6, 7]

$$\wp(u) = -\frac{3}{2}\frac{g_3}{g_2} + \frac{9}{2} g_3 / \left[g_2 \sin^2\left(u \sqrt{\frac{9}{2}\frac{g_3}{g_2}} \right) \right], \tag{7}$$

где аргумент тригонометрической функции равен

$$u \sqrt{\frac{9}{2}\frac{g_3}{g_2}} = \frac{z}{\lambda}\pi \sqrt{\varepsilon\varepsilon_1 (1-\beta_\Phi^2)\, a g_F / (\beta_\Phi^3 \beta_{\parallel 0})}. \tag{8}$$

Используя (7), (8) и (6), можно записать выражение

$$\Delta W = \frac{W_0 - W}{W_0 - m_0 c^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\sqrt{1-\beta_0^2}} \frac{2\varepsilon\varepsilon_1^2}{\beta_{\perp 0}(1-\beta_\Phi^2)(1-\beta_\Phi^2+\varepsilon_1\beta_\Phi)} \sin^2\left(u \sqrt{\frac{9}{2}\frac{g_3}{g_2}} \right), \tag{9}$$

связывающее относительное изменение энергии ΔW и координату частицы z, и период колебаний энергии

$$T = \sqrt{\beta_{\parallel 0}\beta_\Phi^3 / [\varepsilon\varepsilon_1 (1-\beta_\Phi^2)\, a g_F]}.$$

Развитый метод расчета взаимодействия частицы с волной сравнивается с обычным алгоритмом решения при одинаковых значениях параметров: $\beta_0=0{,}26$; $g_F=1$; $\varepsilon=0{,}01$; $\varphi=0$; $w_0=0$. Для этого проводилось численное интегрирование по методу Рунге — Кутта системы дифференциальных уравнений, описывающих движение заряженной частицы в данных полях в зависимости от $l=z/\lambda$,

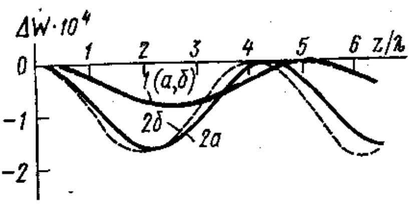
$$\frac{d\beta_x}{dl} = -2\pi \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta_\parallel} \left[\varepsilon \cos\theta \left(1 - \frac{\beta_\parallel}{\beta_\Phi} \right) + \beta_y - \varepsilon\beta_x B \right],$$

$$\frac{d\beta_y}{dl} = -2\pi \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta_\parallel} \left[g\varepsilon \sin\theta \cdot \left(1 - \frac{\beta_\parallel}{\beta_\Phi} \right) - \beta_x - \varepsilon\beta_y B \right],$$

$$\frac{d\beta_\parallel}{dl} = -2\pi \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta_\parallel \beta_\Phi} \varepsilon B (1 - \beta_\Phi \beta_\parallel), \tag{10}$$

$$\frac{d\theta}{dl} = 2\pi \frac{\beta_\Phi - \beta_\parallel}{\beta_\parallel \beta_\Phi}, \quad \theta = \omega\xi, \quad B = \beta_x \cos\theta + g\beta_y \sin\theta.$$

На рисунке приведены результаты расчета ΔW при $\varepsilon_1=0{,}005$ (*1, а, б*) и при $\varepsilon_1=0{,}006$ (*2, а, б*). Сплошная линия соответствует ΔW, полученному при решении системы дифференциальных уравнений (10) на машине, пунктир — вычислению относительного изменения энергии по формуле (9). Сравнивая результаты расчетов, следует прежде всего отметить, что решения задачи при $\varepsilon_1 \leqslant 0{,}005$ по аналитической формуле (9) и с помощью численного интегрирования (10) практически полностью совпадают (кривая *1*). Увеличение рассинхронизма приводит к расхождению результатов расчета (кривые *2, а, б*).



В заключение авторы выражают благодарность проф. И. М. Тернову и ст. науч. сотр. В. Р. Халилову за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. ЖЭТФ, 1963, 44, с. 261. [2] Roberts C. S., Buchshbaum S. J. Phys. Rev. A, 1964, 135, N 2, p. 846. [3] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. [4] Тернов И. М., Хапаев А. М., Володин Б. А. Изв. вузов. Сер. Физика, 1980, № 6, с. 42. [5] Тернов И. М., Хапаев А. М., Володин Б. А. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1980, 21, № 4, с. 70. [6] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. [7] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию
22.09.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 535.375

ВЛИЯНИЕ БЛИЖАЙШЕГО ОКРУЖЕНИЯ МОЛЕКУЛ РАСТВОРЕННОГО ВЕЩЕСТВА НА ИХ СПЕКТРЫ ПОГЛОЩЕНИЯ

Н. Б. Баранова, Л. В. Левшин, М. Г. Рева, Б. Д. Рыжиков

(кафедра общей физики для физического факультета)

Анализ обширного экспериментального материала показывает, что изменение ближайшего окружения молекул растворенного вещества, вызываемое включением в их сольватную оболочку такой же молекулы либо молекулы примеси, приводит к существенному изменению их спектра поглощения. Наибольшее внимание в имеющейся литературе уделяется случаю взаимодействия молекул одного и того же красителя [1]. Следует заметить, что до последнего времени объяснение спектральных изменений проводилось с позиций резонансной теории [2, 3], согласно которой при близком расположении двух одинаковых молекул происходит резонансное расщепление их электронных уровней. На недостатки этой теории указывалось в работах [4, 5]. Кроме того, эта теория испытывает затруднения при объяснении концентрационного гипохромного эффекта. Слабой стороной ее является также отсутствие учета изменений ближайшего окружения молекул растворенного вещества при увеличении их концентрации.

В настоящей работе исследовались деформации электронных спектров поглощения сложных органических молекул с изменением их ближайшего окружения при включении в сольватную оболочку молекул растворенного вещества молекул примеси. В качестве примесей могут выступать либо молекулы растворенного вещества, либо молекулы других веществ. При этом основное внимание уделялось выяснению вклада резонансного расщепления и смещения уровней в наблюдаемые спектральные изменения. Оценку вклада в деформации спектров поглощения резонансного расщепления и изменения ближайшего окружения при ассоциации молекул легче всего провести на примере соединений, обладающих ярко выраженной электронно-колебательной структурой. На рис. 1 приведены спектры поглощения мономерных молекул 2,3-бензантрацена в диметилсульфоксиде (*DMSO*) и ассоциированных молекул 2,3-бензантрацена в бинарной смеси *DMSO* с водой. Из рис. 1 видно, что спектр поглощения ассоциированных молекул (*2*) смещен в длинноволновую сторону по отношению к