энергии связи. При дальнейшем увеличении концентрации ПАВ происходит восстановление не первоначального спектра поглощения ассоциатов родамина С (кривая *1*), а мономерной полосы поглощения красителя (кривая *4*), что и следует ожидать, поскольку дисперсионное взаимодействие между образующимися комплексами затруднено из-за большого количества ПАВ в растворе.

Описанные изменения спектров поглощения красителей аналогичны их деформациям при введении в растворы высокомолекулярных веществ (эффект метахромазии) [12]. Поэтому развиваемые в настоящей работе представления могут быть применены и для объяснения явления метахромазии.

Таким образом, многообразие изменений спектров поглощения сложных органических веществ, наблюдаемых при увеличении концентрации молекул растворенного вещества, а также при введении различных добавок, объясняется с единых позиций с учетом структуры образующихся в растворе комплексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Южаков В. Ю. Успехи химии, 1979, **48**, № 11, с. 2007. [2] Rac Mc., Kasha M. Physical Processes in Rad. Biol. Acad. Press. N. Y., 1964, p. 23—42. [3] Kasha M. Rad. Res., 1963, **20**, p. 55. [4] Kajiwara T., Chambers R. W., Kearns D. R. Chem. Phys. Lett., 1973, **22**, p. 37. [5] Kajiwara T., Chambers R. W., Kearns D. R. J. Phys. Chem., 1974, **78**, p. 380. [6] Левшин Л. В., Рева М. Г., Рыжиков Б. Д. Деп. ВИНИТИ, № 14720—80. [7] Левшин Л. В., Рева М. Г., Рыжиков Б. Д. Журн. прикл. спектроскопии, 1977, **26**, № 1, с. 66. [8] Кунавин Н. И., Нурмухаметов Р. Н., Хачатурова Г. Т. Журн. прикл. спектроскопии, 1977, **26**, № 6, с. 1023. [9] Tinoco J. J. Amer. Chem. Soc., 1960, **82**, p. 4785. [10] Rhodes W. J. Amer. Chem. Soc., 1961, **83**, p. 3609. [11] Рева М. Г., Рыжиков Б. Д., Сенаторова Н. Р. Вестн. Моск. ун-та, Сер. Физ. Астрон., 1980, **21**, № 3, с. 63. [12] Левшин Л. В., Славнова Т. Д. и др. Журн. прикл. спектроскопии, 1973, **18**, № 3, с. 416.

Поступила в редакцию
14.11.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 533.951

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ВОЛН В ГОРЯЧЕЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

Л. С. Кузьменков, П. А. Поляков, П. Б. Подосенов

(кафедра теоретической физики)

Одна из попыток построения релятивистской гидродинамической теории волн в релятивистской плазме была предпринята в работе [1]. В этой работе предполагалось, что плотность тензора энергии-импульса частиц T^{ij} представима в виде [2]

$$T^{ij}=(\varepsilon+p)\tau^i\tau^j-g^{ij}p. \qquad (1)$$

В работе [3] были получены уравнения релятивистской гидродинамики на основе локального максвелловского распределения частиц плазмы, для которого тензор энергии-импульса также представим в виде (1). Однако, как будет показано ниже, это хорошо известное представление тензора T^{ij} несправедливо для плазмы при наличии в ней волн и приводит к принципиальному расхождению с кинетической теорией.

Вместе с тем использование при определении и разбиении тензора энергии-импульса статистических представлений и предположения об

идеальности плазмы позволяет получить результаты, согласующиеся с кинетической теорией, а также ряд новых результатов, которые проще могут быть получены с помощью гидродинамических уравнений.

Выведем основные уравнения двухжидкостной релятивистской гидродинамики с помощью релятивистского уравнения Власова [4]

$$u^i \frac{\partial f_a}{\partial x^i} - \frac{1}{m_a c} \frac{\partial}{\partial u^k} \left[\left(\frac{e_a}{c} F^{ki} u_i + g_a^k \right) f_a \right] = 0, \tag{2}$$

где

$$g_a^k = \frac{2}{3} \frac{e_a^3}{m_a c^3} \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^n} u_i u^n - \frac{2}{3} \frac{e_a^4}{m_a^2 c^5} F^{ki} F_{ni} u^n + \frac{2}{3} \frac{e_a^4}{m_a^2 c^5} (F_{nm} u^m)(F^{ni} u_i) u^k,$$

$$f_a = f_a(x^i, u^\beta)\, 2\theta(u^0)\, \delta(u_n u^n - 1), \tag{3}$$

u^i — 4-вектор скорости, $\theta(u^0)$ — функция Хевисайда. Индекс a нумерует сорт частиц, латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а греческие — 1, 2, 3. Интегрируя уравнение (2) с весами 1 и u^i, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\nu_a \tau_a^i) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T_a^{ik} = \nu_a e_a F_i^k \tau_a^i + c\mathcal{F}_{\text{rad}}^k, \tag{5}$$

где τ^i — 4-вектор гидродинамической скорости;

$$\tau^i = \int u^i f_a d\Omega / \nu_a, \quad \left(d\Omega = \frac{d^3 u}{u_0}, \ \tau_a^i \tau_{ai} = 1 \right), \tag{6}$$

ν_a — инвариантная плотность частиц сорта a,

$$T_a^{ij} = m_a c^2 \int u^i u^j f_a d\Omega, \tag{7}$$

$\mathcal{F}_{\text{rad}}^k$ — среднее значение радиационной силы:

$$\mathcal{F}_{\text{rad}}^0 = -\int g_a^\alpha \frac{u_\alpha}{u_0} f_a d\Omega, \ \mathcal{F}_{\text{rad}}^\beta = \int g_a^\beta f_a d\Omega. \tag{8}$$

Система моментных уравнений (4), (5) является незамкнутой. Для ее замыкания тензор энергии-импульса обычно представляют в виде (1). Исследуем теперь, при каких условиях это предположение справедливо. Для этого без ограничения общности будем считать, что в нашей системе отсчета имеются потоки только вдоль координатной оси x, т. е. все недиагональные компоненты тензора (7), кроме T^{01}, равны нулю. Перейдем теперь в систему отсчета S', в которой отсутствует поток частиц, т. е. $\tau^{1'} = 0$. Используя преобразования Лоренца [2], можно найти связь компонент тензора энергии-импульса с компонентами T^{ij} этого тензора в системе S':

$$T^{00} = (\varepsilon + p)\tau^0\tau^0 - p + 2\tau^0\tau^1 mc^2 \int u^{0'} u^{1'} f' d\Omega',$$

$$T^{11} = (\varepsilon + p)\tau^1\tau^1 + p + 2\tau^0\tau^1 mc^2 \int u^{0'} u^{1'} f' d\Omega', \tag{9}$$

$$T^{01} = T^{10} = (\varepsilon + p)\tau^0\tau^1 + (\tau^0\tau^0 + \tau^1\tau^1) mc^2 \int u^{0'} u^{1'} f' d\Omega',$$

$$T^{22} = T^{22'}, \ T^{33} = T^{33'},$$

где $p = n\Theta$,

$$\varepsilon = mc^2 \int u^{0'} f' d^3u',$$

$$n\Theta = \int u^{1'} u^{1'} f' d^3u', \quad n(x) = \int f' d^3u'. \tag{10}$$

Формулы (10) являются статистическими определениями соответственно давления, внутренней энергии, температуры, плотности числа частиц [5]. Соотношения (9) совпадают с (1) только в том случае, если поток импульса в системе S' равен нулю, т. е.

$$mc^2 \int u^{0'} u^{1'} f' d\Omega' = 0. \tag{11}$$

Однако при условии $\tau^{1'} = 0$ равенство (11), вообще говоря, не выполняется для функций f', не являющихся симметричными. В этом случае представление тензора энергии-импульса в виде (1) несправедливо.

В частности, при распространении гармонической волны в плазме возмущенная функция распределения согласно кинетическому уравнению Власова (2) будет иметь вид [6]

$$\delta f_a = -\frac{1}{m_a c} \frac{\partial}{\partial u^k} \left[\left(\frac{e_a}{c} F^{kj} u_i + g_a^k \right) f_{a(0)} \right] \frac{1}{ik_j u^j},$$

из которого следует, что если стационарное распределение $f_{a(0)}$ симметрично, то δf_a не будет симметричной функцией.

Таким образом, гидродинамическая теория волн в плазме, основанная на предположении (1), может приводить к ошибочным результатам.

Рассмотрим теперь вопрос о замыкании системы уравнений (4), (5) совместно с уравнениями Максвелла. Для этого из тензора энергии-импульса выделим тензор давления [7]

$$P^{\alpha\beta} = mc \int \left(u^\alpha - \frac{\mathcal{P}^\alpha}{mc} \right) (V^\beta - v^\beta) f d^3u, \tag{12}$$

где $\mathcal{P}^\alpha$ — средний поток импульса частиц:

$$\mathcal{P}^\alpha = mc \int u^\alpha f d^3u / n(x), \quad \frac{V^\beta}{c} = \frac{u^\beta}{u^0}, \quad \frac{v^\beta}{c} = \frac{\tau^\beta}{\tau^0}. \tag{13}$$

Тогда пространственные компоненты тензора (7) принимают вид

$$T^{\alpha\beta} = \nu c \mathcal{P}^\alpha \tau^\beta + P^{\alpha\beta}. \tag{14}$$

Предположим, что тензор давления симметричен. Тогда $\mathcal{P}^1/\tau^1 = \mathcal{P}^2/\tau^2 = \mathcal{P}^3/\tau^3$. Ковариантным обобщением этого условия являются равенства $\mathcal{P}^1/\tau^1 = \mathcal{P}^2/\tau^2 = \mathcal{P}^3/\tau^3 = \mathcal{P}^0/\tau^0$. Тогда $T^{0i} = \nu c \mathcal{P}^0 \tau^i$, $T^{i0} = \nu c \mathcal{P}^i \tau^0$. Далее, как и в нерелятивистской теории, предположим, что плазма — это идеальная жидкость, т. е. $P^{\alpha\beta} = p\delta^{\alpha\beta}$. Тогда система уравнений гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла [2] будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\nu_a \tau_a^i) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} [\nu_a c \mathcal{P}_a^i \tau_a^k + P^{ik}] = \nu_a e_a F_i^k \tau_a^i + c \mathcal{F}_{\text{rad}}^k,$$

$$F_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 4\pi e_a \nu_a \tau_a^i.$$

Линеаризуем систему уравнений (15), пренебрегая возмущениями ионов и считая электронно-ионную плазму квазинейтральной. Полагаем

$$\tau_1^i = \tau_{(0)}^i + \tau^i,\ p_1 = p_{(0)} + p,\ \mathscr{P}_1^i = \mathscr{P}_{(0)}^i + \mathscr{P}^i,\ \nu_1 = \nu_{(0)} + \nu,$$

где индексом 0 обозначены равновесные значения величин, а τ^i, p, $\mathscr{P}^i$, ν — их возмущенные значения. Тогда из (15) имеем, считая, что все возмущенные величины пропорциональны

$$\exp(-ik_i x^i),\ \tau_{(0)}^i = \{1, 0, 0, 0\},\ \mathscr{P}_{(0)}^i = \{\mathscr{P}_{(0)}^0, 0, 0, 0\}$$

и известно уравнение состояния процесса $p = p(n)$, а также полагая, что волны распространяются вдоль оси x, $k^i = \{k^0, k^1, 0, 0\}$,

$$\Lambda_{\sigma\mu} A^\mu = 0. \tag{16}$$

Здесь

$$\Lambda_{\sigma\mu} = -\delta_{\sigma\mu} k_0 \left[\frac{4\pi e^2 \nu_{(0)}}{k_n k^n} \left(1 - i\frac{2}{3} r_0 k_0 \frac{\varepsilon}{mc^2}\right) - \varepsilon \right] + a_{\sigma\mu} +$$
$$+ \frac{k_\sigma k_\mu}{k_0} \left[\frac{4\pi e^2 \nu_{(0)}}{k_n k^n} \left(1 - i\frac{2}{3} r_0 k_0 \frac{\varepsilon}{mc^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial n} \right], \tag{17}$$

где

$$a_{1\mu} = 0,$$

$$a_{2,3\mu} = -\delta_{2,3\mu} \frac{4\pi e}{k^n k_n} i \frac{2}{3} \frac{e^3}{m^2 c^4} p_0 k^1 k_1.$$

Из условия разрешимости уравнения (16) имеем дисперсионное уравнение

$$\det(\Lambda_{\mu\sigma}) = 0. \tag{18}$$

Обозначая $\omega + i\gamma = ck_0$, $k = k_1$, $\varepsilon = c\mathscr{P}_0$, из уравнения (18) получаем следующее выражение для частоты колебаний и декремента затухания ленгмюровских волн:

$$\omega^2 = \omega_p^2 \frac{mc^2}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial n} k^2 c^2, \tag{19}$$

$$\gamma = -\frac{1}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2, \tag{20}$$

и для электромагнитных волн

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 mc^2/\varepsilon, \tag{21}$$

$$\gamma = -\frac{1}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2 \left(1 + \frac{\Theta}{\varepsilon} \frac{k^2 c^2}{k^2 c^2 + \omega_p^2 mc^2/\varepsilon}\right). \tag{22}$$

Предположим, что зависимость давления от плотности представима в виде

$$p = \text{const} \cdot n^\Gamma, \tag{23}$$

а в равновесии частицы распределены согласно релятивистскому зако-

ну Максвелла. Тогда для средней энергии частиц плазмы можно записать

$$\varepsilon = mc^2 \left[K_3\left(\frac{mc^2}{\Theta}\right) \Big/ K_2\left(\frac{mc^2}{\Theta}\right) - \frac{\Theta}{mc^2} \right]. \tag{24}$$

С учетом (23) и (10) соотношение (19) примет вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 mc^2/\varepsilon + \Gamma k^2 c^2 \Theta/\varepsilon. \tag{25}$$

В нерелятивистском приближении из (24), (25) получим

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \Gamma \Theta k^2/m. \tag{26}$$

Из сравнения с известной дисперсионной формулой для ленгмюровских волн в нерелятивистской плазме [8] находим, что $\Gamma=3$. В ультрарелятивистском приближении из (24), (25) и для $\Gamma=3$ находим

$$\omega^2 = \omega_p^2 mc^2/3\Theta + k^2c^2. \tag{27}$$

Из формулы (27) видно, что при ультрарелятивистских температурах дисперсионное уравнение для ленгмюровских волн совпадает с дисперсионным уравнением электромагнитных волн в вакууме. Этот вывод согласуется с аналогичным результатом Силина [8], полученным на основании строгой кинетической теории.

Для длинных волн дисперсионное уравнение согласно (25) примет вид $\omega^2 = \omega_p^2 mc^2/3\Theta$. Эта формула справедлива при любых уравнениях состояния и совпадает с аналогичной формулой Силина [8].

В работе [1], где используется тензор энергии-импульса в виде (1), соответствующая дисперсионная формула для длинных ленгмюровских волн не зависит от уравнения состояния плазмы и имеет вид $\omega^2 = \omega_p^2 mc^2/4\Theta$, что находится в принципиальном противоречии с кинетической теорией.

Уравнение состояния (23) с $\Gamma=3$ правильно описывает дисперсию ленгмюровских волн как в нерелятивистской плазме, так и в ультрарелятивистской. Однако если в нерелятивистском пределе этот процесс соответствует одномерному адиабатическому сжатию, то в ультрарелятивистской плазме он не является адиабатическим.

Что касается дисперсии электромагнитных волн, то формула (21) для ультрарелятивистской плазмы ($\Theta \to \infty$) также согласуется (в отличие от следствия работы [1]) с результатами кинетической теории [8].

Укажем, что декремент радиационного затухания как электромагнитных, так и ленгмюровских волн (20), (22) в нерелятивистском пределе согласуется с аналогичными формулами, полученными в работе [6].

Декремент затухания ленгмюровских волн в гидродинамическом приближении не зависит от температуры плазмы, несмотря на учет давления, и совпадает с декрементом радиационного затухания ленгмюровских волн в холодной плазме.

Декремент затухания электромагнитных волн зависит от температуры электронов плазмы и, в частности, в ультрарелятивистском пределе, согласно (22), равен $\gamma = -4r_0\omega_p^2/9c$, т. е. радиационное затухание электромагнитных волн в ультрарелятивистской плазме в 4/3 раза больше, чем их радиационное затухание в нерелятивистской плазме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hyun S., Kennel C. F. J. Plasma Phys., 1978, 20, N 2, p. 281. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967, с. 28—118. [3] Kwok-Kee Tam, Kiang David. Progr. of Theor. Phys., 1979, 62, N 5, p. 1245. [4] Кузьменков Л. С. ДАН СССР, 1978, 241, № 2, с. 322. [5] Кузьменков Л. С., Поляков П. А. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, 18, № 1, с. 94. [6] Кузьменков Л. С., Поляков П. А. Изв. вузов. Сер. Физика, 1980, № 4, с. 16. [7] Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978, с. 28. [8] Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Госатомиздат, 1961, с. 95.

Поступила в редакцию
11.12.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 53:51

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ДЛИННЫХ СТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ ПОД ЗАКАЛКУ В ИНДУКТОРЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. Б. Гласко, М. К. Трубецков

(кафедра математики)

1. Математическое моделирование физических процессов является эффективным средством для изучения возможностей новых инженерных конструкций.

Поскольку количественные характеристики факторов, обусловливающих процессы, обычно неизвестны и подлежат определению в зависимости от предъявляемых к системе требований, соответствующие модели содержат элементы обратных задач. Тем самым решение проблемы моделирования неизбежно опирается на концепции теории регуляризации [1]. Так как далее операторы, определяющие желаемый эффект работы системы, часто задаются дифференциальными соотношениями, их вычисление проводится с помощью разностных схем [2].

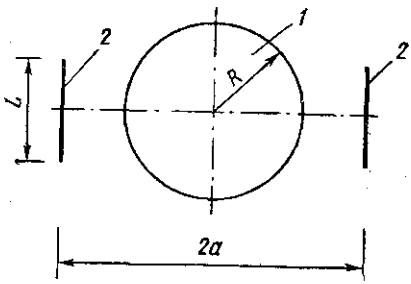

Рис. 1. Геометрическая конфигурация системы: *1* — образец, *2* — шины индуктора

В настоящей работе на указанной основе в рамках выбранной модели рассматривается ранее не подвергавшийся математическому изучению процесс нагрева под закалку длинных стальных образцов цилиндрической формы в индукторе специальной конструкции [3].

2. На рис. 1 изображено поперечное сечение рассматриваемой конструкции. Будем считать, что толщиной шин индуктора и распределением плотности тока в них можно пренебречь в рамках рассматриваемой задачи и поэтому аппроксимируем индуктор бесконечно тонкими лентами ширины L. В этих лентах течет электрический ток противоположных направлений $\bar{I}=I(t)e^{i\omega t}$, где $I(t)$ — медленно меняющаяся со временем амплитуда; ток порождает электромагнитное поле, проникающее в глубь образца, и индуцированные токи Фуко приводят к нагреву. Образец вращается вокруг своей оси с угловой частотой Ω, так что область высоких температур «размазывается» некоторым образом по поверхности образца.