

УДК 537.312.62

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

В. И. Ярославцев

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

В основе микроскопической теории сверхпроводимости лежит представление о том, что тепловое движение ионов приводит к возникновению эффективного притяжения между электронами вблизи поверхности Ферми. Эффективный четырехфермионный гамильтониан, заданный на пространстве состояний $\mathfrak{B} = \prod_i \otimes C_i^{(2)}$, имеет вид

$$H\{\psi\} = \int dr \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\dagger}(r) \left[\frac{p^2}{2m} - \mu + U(r) \right] \psi_{\alpha}(r) + \\ + \frac{1}{2} \iint dr dr' \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^{\dagger}(r) \psi_{\beta}^{\dagger}(r') \Phi(r-r') \psi_{\beta}(r') \psi_{\alpha}(r), \quad (1)$$

где $\psi_{\alpha}^{\dagger}(r)$, $(\psi_{\beta}(r))$ — полевые операторные функции, соответствующие рождению (уничтожению) электрона со спином $\alpha(\beta)$ в точке r , μ — химический потенциал, $U(r)$ — периодический потенциал решетки и $\Phi(r-r')$ — парное взаимодействие. Среднее число частиц определяется соотношением

$$N = \int dr \sum_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}^{\dagger}(r) \psi_{\alpha}(r) \rangle.$$

Обычно в (1) учитывают лишь взаимодействие электронов с противоположно направленными импульсами и спинами [1]. Такой гамильтониан инвариантен по отношению к градиентному преобразованию $\psi_{\alpha}(r) \rightarrow e^{\pm i\Phi} \psi_{\alpha}(r)$, где $\Phi > 0$ — произвольное вещественное число [2]. С другой стороны, сверхпроводящее состояние не обладает свойством градиентной инвариантности [2]. Это противоречие разрешается в рамках концепции квазисредних Боголюбова [2], когда при переходе к термодинамическому пределу

$$V \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V}{N} \rightarrow \text{const}$$

тем или иным способом фиксируется один из типов внутренней симметрии системы (см. также [3, 4]). Для модели БКШ в теории сверхпроводимости такая фиксация симметрии сверхпроводящей фазы (снятие вырождения) производится путем замены исходного гамильтониана аппроксимирующей формой, выбираемой специальным образом [5] и определенной на пространстве $\mathfrak{B}_s$, соответствующем нарушению свойства градиентной инвариантности и ортогональном к $\mathfrak{B}$ [6—8]. При этом в рамках метода Боголюбова (мл.) [9] удастся показать, что в термодинамическом пределе модельный и аппроксимирующий гамильтонианы приводят к одинаковым выражениям для термодинамических потенциалов, временных корреляционных функций и функций Грина при всех конечных значениях температуры θ :

Такой подход позволяет определить чистое фазовое состояние — сверхпроводящее или нормальное. Вместе с тем в реальных сверхпроводниках могут существовать состояния, когда лишь некоторая доля электронов участвует в образовании куперовских пар, тогда как остальные вносят вклад в нормальное (проводящее) состояние. Воздействие магнитного поля может приводить к пространственному разделению этих двух состояний [10] (вихревые нити Абрикосова).

В теории сверхпроводимости известен феноменологический подход, восходящий к работе Гортера и Казимира [11], в котором в термодинамические соотношения в качестве неопределенного множителя вводится параметр ω , задающий концентрацию «сверхпроводящих электронов», тогда как «нормальным электронам» соответствует концентрация $(1-\omega)$. Обсуждение различных вариантов и обобщений такого подхода дано в работе [12]. Очевидно, несомненный интерес представляло бы развитие подобных двухжидкостных моделей в рамках микроскопического подхода, так как это позволило бы последовательно описать явление взаимного проникновения нормальной и сверхпроводящей фаз и явления, наблюдаемые в сверхпроводниках второго рода. С этой целью в настоящей работе мы воспользуемся методом, предложенным в [13] и основывающимся на концепции квазисредних Боголюбова. Указанный метод применялся в теории кристалла с диссоциацией решетки [14, 15] и был распространен на спиновые системы с магнитным упорядочением в [16].

В соответствии с методом работ [13—16] введем полевые операторы $\psi_{\alpha i}(\mathbf{r})$ двух «сортов» ($i=1, 2$), определенные на пространствах $\mathfrak{H}_1$ (при $i=1$) и $\mathfrak{H}_2$ (при $i=2$) соответственно. Иначе говоря, операторы $\psi_{\alpha i}(\mathbf{r})$ с различными значениями i описывают «разные электроны» — «сверхпроводящие» или «нормальные». Каждому «типу» электронов сопоставим гамильтониан вида (1); тогда полный гамильтониан двухжидкостной системы естественно определить как

$$H = \sum_i \oplus H\{\psi_i\}, \quad (2)$$

где $H\{\psi_i\}$ совпадает с (1) при замене $\psi_i \rightarrow \psi$. Теперь, если N — полное число электронов в системе, то концентрацию электронов в i -м фазовом состоянии естественно определить соотношением

$$\omega = N^{-1} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha} \langle \psi_{\alpha i}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha i}(\mathbf{r}) \rangle,$$

причем должно выполняться условие нормировки

$$\sum_i \omega_i = 1. \quad (3)$$

Подчеркнем, что обеим электронным жидкостям приписывается один и тот же химический потенциал, так как они предполагаются сосуществующими в равновесии, как и в обычных феноменологических теориях [12].

Теперь перейдем обычным образом к представлению вторичного квантования на плоских волнах

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}\alpha} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

и далее к квазиспиновому формализму «парных состояний» [17, 6]

$$\begin{cases} \sigma_p^- = a_{p\uparrow}^+ a_{-p\downarrow}^+ \\ \sigma_p^+ = a_{-p\downarrow} a_{p\uparrow} \end{cases}$$

(см. также [18]). Здесь $\sigma_p^\pm = \frac{1}{2} (\sigma_p^x \pm i\sigma_p^y)$ и σ_p^α — соответствующая матрица Паули. Заметим, что по построению

$$\langle a_{p\uparrow}^+ (2) a_{-p\downarrow}^+ (2) \rangle = \langle a_{-p\downarrow} (2) a_{p\uparrow} (2) \rangle = \langle \sigma_p^\pm (2) \rangle = 0,$$

где $a_{p\alpha}(i)$ определено на соответствующем пространстве состояний. Заметим также, что как и в случае ферромагнетика [16], можно перейти к обычным условиям нормировки для операторов квазиспина $\sigma_p^+(i)$, что приведет к появлению в гамильтониане факторов ω_i , в частности, к перенормировке взаимодействия: $\Phi(\cdot) \rightarrow \omega_i^2 \Phi(\cdot)$. В результате гамильтониан модельного двухжидкостного сверхпроводника может быть представлен в виде

$$[H = \sum_i \oplus H_i, \quad (4)$$

$$H_i = \frac{1}{2} \sum_p \epsilon_p (1 - \sigma_p^z(i)) \omega_i - \frac{1}{N} \omega_i^2 \sum_{p,p'} J(p, p') \sigma_p^-(i) \sigma_{p'}^+(i).$$

Здесь функции ϵ_p и $J(p, p')$ удовлетворяют некоторым достаточно общим условиям [5, 19, 9]. Кроме того, задача дополняется условием нормировки для фазовых концентраций (3) и условием равенства химических потенциалов разных фаз. Это последнее условие в случае гамильтониана (4) приводит к следующему выражению для фазовой концентрации $\omega = \omega_1$:

$$\omega = \frac{E_1(\theta, \omega) - E_2(\theta, \omega) + 2G_2(\theta, \omega)}{2(G_1(\theta, \omega) + G_2(\theta, \omega))}, \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} E_i(\theta, \omega) &\equiv \frac{1}{2} \left\langle \sum_p \epsilon_p (1 - \sigma_p^z(i)) \right\rangle, \\ G_i(\theta, \omega) &\equiv \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{N} \sum_{p,p'} J(p, p') \sigma_p^-(i) \sigma_{p'}^+(i) \right\rangle \end{aligned}$$

и усреднение производится по распределению с гамильтонианом (4). Таким образом, соотношения (3)–(5) полностью определяют эффективную двухжидкостную микроскопическую модель сверхпроводника. В отличие от феноменологических моделей типа Гортера — Казимира фазовая концентрация ω не является здесь вариационным подгоночным параметром, но определяется как функция температуры и микроскопических параметров ϵ и J из условия равновесия между различными фазовыми состояниями.

Для того чтобы качественно рассмотреть возможности, описываемые модельной задачей (3)–(5), ограничимся простейшим случаем сильного спаривания, когда $\epsilon_p = \epsilon = \text{const}$ [6], и приближением постоянного взаимодействия $J(p, p') = J = \text{const}$. Стандартным способом перей-

дем для (4) к аппроксимирующему гамильтониану [20]:

$$H^{(0)} = \sum_i \oplus H_i^{(0)},$$

$$H_i^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_p \varepsilon (1 - \sigma_p^z(i)) \omega_i - \omega_i^2 \sum_p J (\sigma_p^-(i) \xi(i) +$$

$$+ \sigma_p^+(i) \xi^*(i) - \xi(i) \xi^*(i)), \quad (6)$$

где $\xi(i)$ — вариационные параметры, определяемые из условия минимальности свободной энергии [9]. Поэтому соответствующая (6) плотность свободной энергии имеет вид:

$$g(\theta) = \omega^2 J \xi \xi^* + \frac{\varepsilon \omega}{2} - \theta \ln 2 \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2\theta} - \theta \ln (1 + e^{-\frac{\varepsilon(1-\omega)}{\theta}}),$$

где $\xi = \xi(1)$ и $\lambda = \sqrt{\varepsilon^2 \omega^2 + 4\omega^4 J^2 |\xi|^2}$.

Получаемое из условия минимума уравнение для параметра порядка ξ :

$$\xi = \frac{\omega^2 J \xi}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2\theta} \quad (7)$$

отличается от обычного ренормировкой: $\varepsilon \rightarrow \varepsilon \omega$, $J \rightarrow J \omega^2$. Соотношение (5) для фазовой концентрации теперь может быть переписано в явном виде:

$$\omega = \frac{1}{2J \xi \xi^*} \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 \omega}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2\theta} - \frac{\varepsilon}{\exp \left\{ \frac{\varepsilon}{\theta} (1 - \omega) \right\} + 1} \right). \quad (8)$$

Из уравнений (7), (8) видно, что ненулевое решение для ξ возникает при $\theta \leq \theta_c$, где

$$\theta_c = \varepsilon / \left(4 \operatorname{Arth} \frac{2\varepsilon}{J} \right), \quad (9)$$

причем $\omega(\theta_c) = 1/2$. При этом должно выполняться условие $J > 2\varepsilon$, вместо обычного в теории сверхпроводимости БКШ условия $J > \varepsilon$. Кроме того, из (8), (9) следует, что даже в основном состоянии концентрация «нормальных» электронов $(1-\omega)$ отлична от нуля при условии $\varepsilon/J < 1$, согласующемся с условиями существования сверхпроводящего фазового перехода.

Таким образом, рассмотренная модель действительно позволяет описать сосуществование нормальной и сверхпроводящей компонент при $\theta < \theta_c$ и определить соответствующие концентрации самосогласованным образом как функции температуры и параметров взаимодействия. Для такой модели может быть проведено обычное для модели БКШ исследование стандартными методами [9].

Автор считает приятным долгом поблагодарить Н. Н. Боголюбова (мл.) за внимание к работе и поддержку, а также А. С. Шумовского и В. И. Юкалова за помощь в постановке задачи и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боголюбов Н. Н. ЖЭТФ, 1958, 34, № 1, с. 58. [2] Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Р-1451, Дубна, 1963. [3] Боголюбов Н. Н. (мл.) Теор. и матем. физика, 1970, 5, № 1, с. 136. [4] Боголюбов Н. Н. (мл.), Шумовский А. С. Тр. МИАН,

1975, 136, с. 351. [5] Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. ЖЭТФ, 1960, 39, № 1, с. 120. [6] Thirring W., Wehrl A. Comm. Math. Phys., 1967, 4, p. 303. [7] Thirring W. Comm. Math. Phys., 1968, 7, p. 181. [8] Jelinek F. Comm. Math. Phys., 1968, 9, p. 169. [9] Боголюбов Н. Н. (мл.) Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974. [10] Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970. [11] Von C. J. Gorter, Casimir H. G. B. Z. tech. Phys., 1934, 15, N 12, p. 539. [12] Лянтон Э. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1964. [13] Юкалов В. И. Теор. и матем. физика, 1976, 26, № 3, с. 403. [14] Юкалов В. И. Теор. и матем. физика, 1976, 28, № 1, с. 92. [15] Yukalov V. I. Physica, 1977, A89, N 2, p. 363. [16] Шумовский А. С., Юкалов В. И. ДАН СССР, 1980, 252, № 3, с. 581. [17] Боголюбов Н. Н. ЖЭТФ, 1958, 34, № 1, с. 73. [18] Шумовский А. С. В кн.: Междунар. симпозиум по избр. проблемам статист. механики. Дубна, 1977, ОИЯИ, Д 17-11490, с. 168. [19] Боголюбов Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, P-511, Дубна, 1960. [20] Bogolubov N. N. Jr., Shumovsky A. S. Indian J. Pure and Appl. Phys., 1970, 8, N 3, p. 121.

Поступила в редакцию
06.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 62.50+534

ТРАЕКТОРИИ КОРНЕЙ СИСТЕМ КЛАССА [5; 0]

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

В работе исследованы типы траекторий корней (ТК) линейных или линеаризованных систем пятого порядка, характеристическое уравнение которых имеет вид

$$(a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5) + K = 0. \quad (1)$$

Здесь K — линейный свободный параметр, изменяющийся в широких пределах ($0 \leq K < +\infty$ или $-\infty < K \leq 0$), a_i ($i=0, 1, \dots, 5$) — параметры семейства ТК, являющиеся функциями параметров системы и принимающие самые разнообразные численные значения. Таким уравнением описываются процессы в системах различной физической природы с обратной связью или без нее, состоящие из различных типовых звеньев.

Как известно [1], корневой годограф дает большую информацию о динамических свойствах системы.

С помощью преобразований уравнения (1) на комплексной плоскости $p = \delta + j\omega$ (сдвига мнимой оси, переноса начальных точек вдоль ТК и изменения масштаба), не меняющих типа ТК, корневые годографы уравнения (1) могут быть изучены в зависимости от двух параметров M_n и N_n , являющихся функциями a_i . На плоскостях (M_n, N_n) можно выделить области с разными типами ТК и определить тип ТК по значениям коэффициентов a_i без непосредственного построения ТК по аналитическим формулам [1], а также проследить зависимость типа ТК от любых параметров семейства ТК.

Соотношения между параметрами M_n и N_n , определяющие тип ТК, могут быть получены из анализа уравнения возможных кратных точек [1], а также асимптотики и симметрии или асимметрии ТК относительно вертикальной прямой, проведенной через центр асимптот [2].

Осуществляя обратный переход к уравнению (1) и анализируя различные типы ТК, можно установить общие закономерности перемещения полюсов систем класса [5; 0] при изменении свободного параметра K .