1975, **136**, с. 354. [5] Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. ЖЭТФ, 1960, **39**, № 1, с. 120. [6] Thirring W., Wehrl A. Comm. Math. Phys., 1967, **4**, p. 303. [7] Thirring W. Comm. Math. Phys., 1968, **7**, p. 181. [8] Jelinek F. Comm. Math. Phys., 1968, **9**, p. 169. [9] Боголюбов Н. Н. (мл.) Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974. [10] Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970. [11] Von C. J. Gorter, Casimir H. G. B. Z. tech. Phys., 1934, **15**, N 12, p. 539. [12] Лянтон Э. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1964. [13] Юкалов В. И. Теор. и матем. физика, 1976, **26**, № 3, с. 403. [14] Юкалов В. И. Теор. и матем. физика, 1976, **28**, № 1, с. 92. [15] Yukalov V. I. Physica, 1977, **A89**, N 2, p. 363. [16] Шумовский А. С., Юкалов В. И. ДАН СССР, 1980, **252**, № 3, с. 581. [17] Боголюбов Н. Н. ЖЭТФ, 1958, **34**, № 1, с. 73. [18] Шумовский А. С. В кн.: Междунар. симпозиум по избр. проблемам статист. механики. Дубна, 1977, ОИЯИ, Д 17-11490, с. 168. [19] Боголюбов Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, Р-511, Дубна, 1960. [20] Bogolubov N. N. Jr., Shumovsky A. S. Indian J. Pure and Appl. Phys., 1970, **8**, N 3, p. 121.

Поступила в редакцию
06.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 62.50+534

ТРАЕКТОРИИ КОРНЕЙ СИСТЕМ КЛАССА [5; 0]

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

В работе исследованы типы траекторий корней (ТК) линейных или линеаризованных систем пятого порядка, характеристическое уравнение которых имеет вид

$$(a_0p^5+a_1p^4+a_2p^3+a_3p^2+a_4p+a_5)+K=0. \qquad (1)$$

Здесь K — линейный свободный параметр, изменяющийся в широких пределах ($0\leqslant K<+\infty$ или $-\infty<K\leqslant 0$), a_i ($i=0, 1, ..., 5$) — параметры семейства ТК, являющиеся функциями параметров системы и принимающие самые разнообразные численные значения. Таким уравнением описываются процессы в системах различной физической природы с обратной связью или без нее, состоящие из различных типовых звеньев.

Как известно [1], корневой годограф дает большую информацию о динамических свойствах системы.

С помощью преобразований уравнения (1) на комплексной плоскости $p=\delta+j\omega$ (сдвига мнимой оси, переноса начальных точек вдоль ТК и изменения масштаба), не меняющих типа ТК, корневые годографы уравнения (1) могут быть изучены в зависимости от двух параметров M_n и N_n, являющихся функциями a_i. На плоскостях (M_n, N_n) можно выделить области с разными типами ТК и определить тип ТК по значениям коэффициентов a_i без непосредственного построения ТК по аналитическим формулам [1], а также проследить зависимость типа ТК от любых параметров семейства ТК.

Соотношения между параметрами M_n и N_n, определяющие тип ТК, могут быть получены из анализа уравнения возможных кратных точек [1], а также асимптотики и симметрии или асимметрии ТК относительно вертикальной прямой, проведенной через центр асимптот [2].

Осуществляя обратный переход к уравнению (1) и анализируя различные типы ТК, можно установить общие закономерности перемещения полюсов систем класса [5; 0] при изменении свободного параметра K.

Производя в уравнении (1) замену $p=p_1-a_1/5a_0$, получим

$$(p_1^5+Rp_1^3+M_1p_1^2+N_1p_1)+K_1=0. \tag{2}$$

Здесь

$$R=\frac{a_2}{a_0}-\frac{2}{5}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2,\quad M_1=\frac{a_3}{a_0}-\frac{3}{5}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{4}{25}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3,$$
$$N_1=\frac{a_4}{a_0}-\frac{2}{5}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_3}{a_0}+\frac{3}{25}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\frac{a_2}{a_0}-\frac{3}{125}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^4 \tag{3}$$

новые параметры семейства ТК, выражающиеся через значения a_i,

$$K_1=\frac{K}{a_0}+\frac{a_5}{a_0}-\frac{1}{5}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_4}{a_0}+\frac{1}{25}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\frac{a_3}{a_0}-$$
$$-\frac{1}{125}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3\frac{a_2}{a_0}+\frac{4}{3125}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^5$$

новый свободный параметр, являющийся линейной функцией K. Начальные точки уравнения (2) получаются переносом начальных точек уравнения (1) вдоль ТК. Класс уравнения при этом не меняется, а одна из начальных точек уравнения (2) всегда равна нулю.

В зависимости от величины $R=\frac{a_2}{a_0}-\frac{2}{5}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\gtreqless 0$ рассмотрим возможные случаи, соответствующие дальнейшему упрощению уравнения (2).

Если $R=0$, то уравнение (2) сразу принимает вид

$$(p_1^5+M_1p_1^2+N_1p_1)+K_1=0, \tag{4}$$

зависящий от двух параметров семейства ТК M_1 и N_1.

Если $R\neq 0$, то с помощью замены $p_1=\sqrt{|R|}\,p_2$ уравнение (2) преобразуется к виду

$$(p_2^5\pm p_2^3+M_2p_2^2+N_2p_2)+K_2=0, \tag{5}$$

также зависящему от двух параметров семейства ТК

$$M_2=M_1/|R|^{3/2},\qquad N_2=N_1/R^2 \tag{6}$$

со свободным параметром $K_2=K_1/|R|^{5/2}$. Знак «+» или «—» в уравнении (5) соответствует $R>0$ или $R<0$.

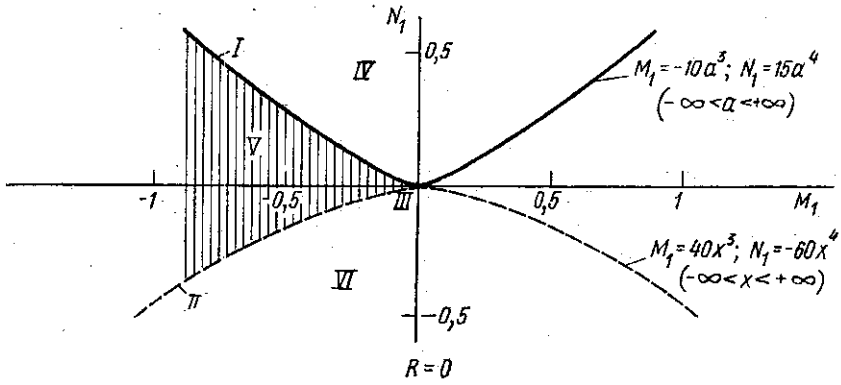
Объединяя вместе уравнения (4) и (5), окончательно получим

$$(p_n^5+p_n^3\operatorname{sign}R+M_np_n^2+N_np_n)+K_n=0, \tag{7}$$

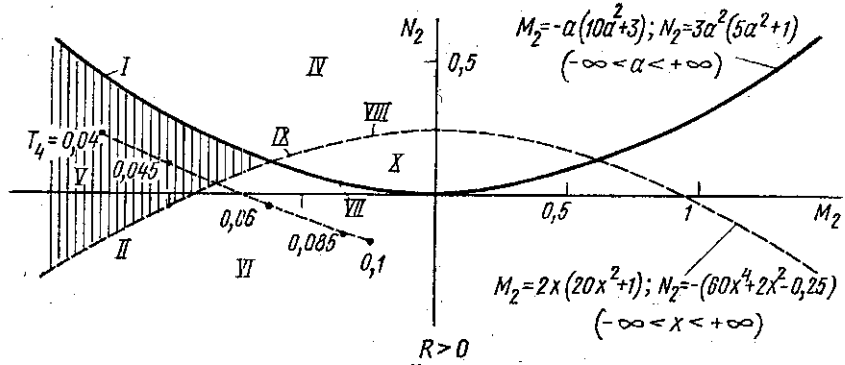
где при $R=0$ $n=1$, а при $R\neq 0$ $n=2$.

Выделим на плоскостях (M_n, N_n) области с разными типами ТК уравнения (7) (рис. 1).

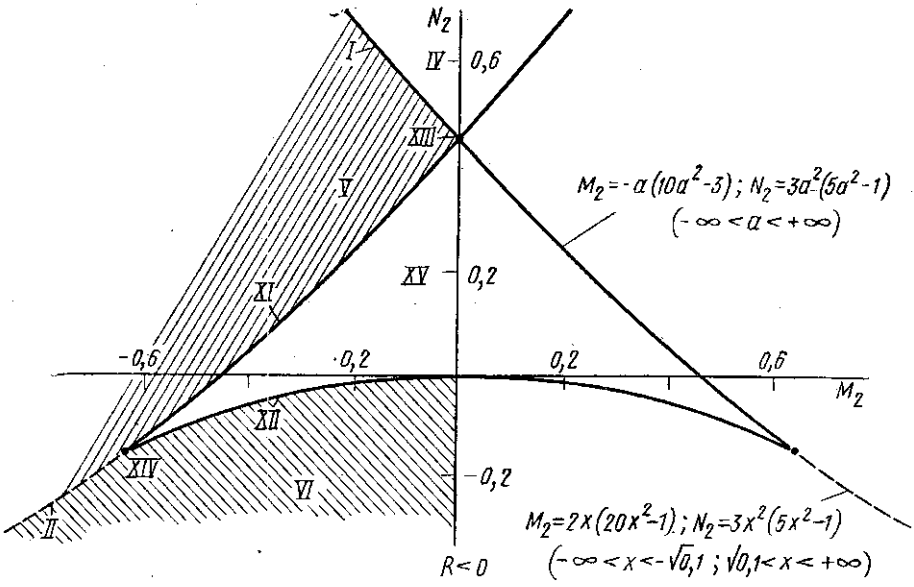
При $M_n=0$ начальные точки, а следовательно, и ТК уравнения (7) симметричны относительно мнимой оси комплексной плоскости p_n. При $M_n\neq 0$ для одинаковых по модулю, но противоположных по знаку значений M_n и одинаковых значений N_n начальные точки получаются зеркальным отражением относительно мнимой оси комплексной плоскости p_n. Назовем типы ТК для значений M_n и N_n, лежащих в левой полуплоскости (M_n, N_n), основными, а для значений M_n и N_n, лежащих в правой полуплоскости, — зеркальными. Знание основных типов ТК позволяет выявить им зеркальные и облегчает анализ уравнения (7).


N_1
0,5
I
IV
V
$M_1=-10a^3;\ N_1=15a^4$
$(-\infty<a<+\infty)$
-1
-0,5
III
0,5
1
M_1
$M_1=40x^3;\ N_1=-60x^4$
$(-\infty<x<+\infty)$
VI
II
-0,5
R = 0

а


N_2
$M_2=-a(10a^2+3);\ N_2=3a^2(5a^2+1)$
$(-\infty<a<+\infty)$
0,5
I
IV
VIII
IX
$T_4=0,04$
V
0,045
X
VII
0,5
1
M_2
0,06
0,085
0,1
II
VI
$M_2=2x(20x^2+1);\ N_2=-(60x^4+2x^2-0,25)$
$(-\infty<x<+\infty)$
R > 0

б


N_2
IV
0,6
I
XIII
V
$M_2=-a(10a^2-3);\ N_2=3a^2(5a^2-1)$
$(-\infty<a<+\infty)$
XV
0,2
XI
-0,6
-0,2
0,2
0,6
M_2
XII
XIV
VI
-0,2
II
$M_2=2x(20x^2-1);\ N_2=3x^2(5x^2-1)$
$(-\infty<x<-\sqrt{0,1};\ \sqrt{0,1}<x<+\infty)$
R < 0

в

Дифференцируя уравнение (7) по p_n последовательно четыре раза, получим уравнения возможных двух-, трех-, четырех- и пятикратных точек:

$$\begin{cases} 5p_n^4 + 3p_n^2 \operatorname{sign} R + 2M_n p_n + N_n = 0, \\ 10p_n^3 + 5p_n \operatorname{sign} R + M_n = 0, \\ 10p_n^2 + \operatorname{sign} R = 0, \\ p_n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Действительно корни кратности больше двух должны удовлетворять не только своему уравнению, но и всем уравнениям более низкой кратности, а комплексно-сопряженные кратные корни — также и уравнению (7). Учитывая, что кратные комплексно-сопряженные точки могут быть только двойными (порядок характеристического уравнения равен пяти), условия их образования можно найти, записав уравнение (7) в виде

$$\begin{gathered} (p_n^5 \pm p_n^5 \operatorname{sign} R + M_n p_n^2 + N_n p_n) + K = \\ = (p_n - x - jy)^2 (p_n - x + jy)^2 (p_n + z) = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p_n.

Области и границы между ними, соответствующие различному числу кратных точек, на рис. 1 обозначены римскими цифрами от I до XV. На рис. 1, *б* типу ТК IX соответствует точка пересечения пунктирной (II и VIII) и сплошной (I и VII) линий. Уравнения границ между областями могут быть получены из анализа уравнений (8) и (9). Сплошной линией изображены кривые, соответствующие типам ТК с трехкратной действительной точкой, прерывистой — с двукратными комплексно-сопряженными точками. Одинаковые типы ТК при различных соотношениях $R \gtreqless 0$ имеют одинаковые обозначения. Для каждого из основных и симметричных типов ТК в таблице дан пример корневого годографа. Крестиками отмечено положение начальных точек, асимптоты проведены штриховыми линиями. Все траектории корней приближаются к асимптотам. Одной стрелкой обозначены положительные ($K_n > 0$), двумя стрелками — отрицательные ($K_n < 0$) корневые годографы.

Пусть при обратном переходе к уравнению (1) мнимая ось занимает положение, обозначенное на корневых годографах таблицы через p в кружочке. Из анализа типов ТК можно сделать ряд выводов.

При больших по модулю значениях K поведение систем класса [5; 0] определяется асимптотикой, задаваемой самим видом уравнения (1). Центр асимптот находится по формуле $a^* = -a_1/5a_0$; из центра асимптоты выходят под углами $\varphi_\nu = \pi\nu/5$ ($\nu = 0, \pm 1, \ldots$) к положительному направлению действительной оси.

С увеличением $|K|$ устойчивые в разомкнутом состоянии системы класса [5; 0] становятся неустойчивыми. Критические частоты находятся из уравнения возможных критических частот

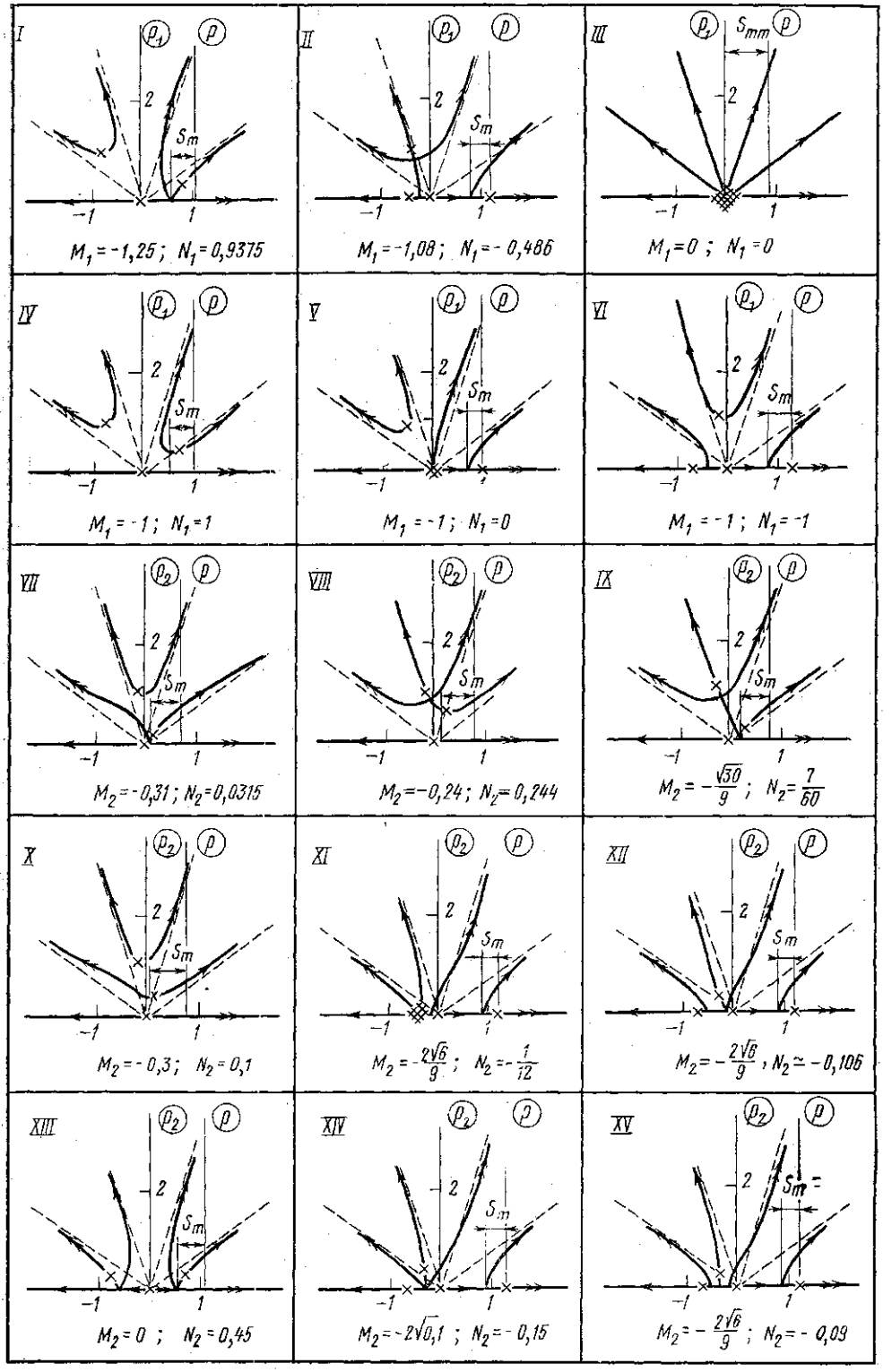
$$a_0\omega_k^4 - a_2\omega_k^2 + a_4 = 0, \tag{10}$$

а соответствующие им критические значения свободного параметра — по формуле [1]

$$-K_k = a_5 - a_3\omega_k^2 + a_1\omega_k^4. \tag{11}$$

При отрицательной обратной связи ($K > 0$) неустойчивость обусловлена приближением ТК к асимптотам, выходящим под углами

Типы траекторий корней систем класса [5; 0]



$\pm\pi/5$. Критической частотой всегда является наименьший из корней уравнения (10) $\omega_k=\omega_{k1}<\omega_{k2}$.

При положительной обратной связи ($K<0$) мнимую ось комплексной плоскости p пересекают действительная ветвь ТК (при $K=K_a=-a_5$) и комплексно-сопряженные ветви ТК, приближающиеся к асимптотам, выходящим под углами $\pm 2\pi/5$ (при $\omega_k=\omega_{k2}$ и $K_k=K_{k2}$). Однако частота ω_{k2} является критической, если $|K_{k2}|<|K_a|$. Если же $|K_{k2}|>|K_a|$, как в примерах типов ТК, данных в таблице, то первым в правую полуплоскость p выходит действительный корень. Это приводит к апериодическому возбуждению системы.

Построив полный корневой годограф [3], можно проследить за изменением степени устойчивости S от свободного параметра K и найти ее максимальное значение S_m. В таблице отмечена величина S_m для каждого из типов ТК. Она может достигаться:

1) в кратных точках, ближайших к мнимой оси $j\omega$ (для большинства типов ТК);

2) на вертикальной прямой, проведенной через три корня (один действительный и два комплексно-сопряженных) с одинаковыми вещественными частями (IV, VIII, X типы ТК).

Для увеличения S_m нужно центр асимптот a^* сдвигать влево. Это осуществляется смещением начальных точек (одной или нескольких) влево относительно мнимой оси $j\omega$.

Максимально достижимая степень устойчивости систем класса [5; 0] $S_{mm}=|a^*|=a_1/5a_0\geqslant S_m$ получается в случае III, VII, VIII и X симметричных типов ТК, т. е. при $R=M_1=N_1=0$ или $R>0$, $M_2=0$; $0\leqslant N_2\leqslant 0{,}25$.

С помощью корневых годографов, данных в таблице, можно оценить характер зависимости переходных процессов (колебательность, величину перерегулирования и т. д.) от свободного параметра K для разных типов ТК.

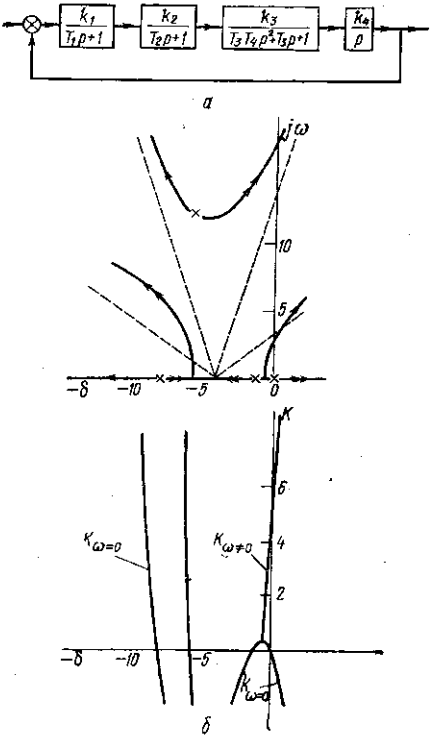


Рис. 2

Аналогично могут быть исследованы зеркальные типы ТК. Все это позволяет облегчить выбор некоторых оптимальных значений параметров систем класса [5; 0], а при использовании ЦВМ — значительно сократить время счета.

В качестве примера исследуем динамические свойства простейшей системы, замкнутой отрицательной обратной связью (рис. 2, *а*). Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3T_4p^2+T_3p+1)+K=0, \qquad (12)$$

где $K=k_1k_2k_3k_4$ — свободный параметр. Пусть

$$T_1=0{,}12\text{ с};\quad T_2=0{,}77\text{ с};\quad T_3=0{,}064\text{ с};\quad T_4=0{,}085\text{ с}.$$

Подставляя численные значения в уравнение (12), получим

$$a_0=0{,}000502656;\quad a_1=0{,}0107552;\quad a_2=0{,}1548;\quad a_3=0{,}954;$$

$a_4=1$; $a_5=0$. Величина $R>0$, а значения параметров $M_2=0{,}35$; $N_2=-0{,}15$ в соответствии с формулами (3) и (6).

С помощью рис. 1, *б* находим, что ТК уравнения (12) имеют VI основной тип. Отмечая на комплексной плоскости частот расположение начальных точек и проводя асимптоты, используя таблицу, нетрудно качественно построить корневой годограф уравнения (12).

Подставляя в (10) и (11) численные значения a_i, находим $\omega_{k1}=2{,}57$; $K_{k1}=5{,}83$ и $\omega_{k2}=17{,}36$; $K_{k2}=-689{,}3$. При отрицательной обратной связи система устойчива в области $0\leqslant K<5{,}83$, а критической частотой является ω_{k1}.

Для уточнения динамических свойств системы можно построить полный корневой годограф (см. рис. 2, *б*). Величина $S_m\cong 0{,}6$ и достигается при $K\cong 0{,}3$ в ближайшей к мнимой оси двукратной точке. При $0<K\leqslant 0{,}3$ доминирующие корни действительные, при $0{,}3<K<5{,}83$ — комплексно-сопряженные.

Аналогично можно исследовать различные семейства ТК систем класса [5; 0]. Пусть, например, в рассматриваемом примере $0{,}04\leqslant T_4\leqslant 0{,}1$. По формулам (3) и (6) находим $R>0$ и строим параметрическую кривую $M_2=M_2(T_4)$, $N_2=N_2(T_4)$. На рис. 1, *б* она изображена пунктиром. По ней можно проследить за изменением типа ТК от T_4, а с помощью таблицы качественно построить семейство ТК уравнения (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961, т. 1, с. 40. [3] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, **14**, № 1, с. 60.

Поступила в редакцию
09.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 539.125.516.4

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. А. Обухов, В. К. Перес-Фернандес

(кафедра квантовой теории)

В работе исследуются релятивистские волновые уравнения векторного поля во внешнем магнитном поле. Известный произвол в выборе лагранжиана векторного поля во внешнем электромагнитном поле позволяет ввести феноменологический параметр k, характеризующий магнитный момент частицы [1, 2]. Случай $k=1$ соответствует модели Вейнберга 1967 г. [1, 3]. При этом спиновый магнитный момент векторной частицы равен $\mu_Б$ — магнетону Бора, в выражении для которого масса m_e заменена на массу векторной частицы m [1]. В данной работе получены точные решения векторных уравнений как в случае $k=1$, так и для произвольных k. Найден спектр энергии векторной частицы в магнитном поле, согласующийся с результатами работы [2], в кото-