Подставляя численные значения в уравнение (12), получим

$$a_0=0{,}000502656;\quad a_1=0{,}0107552;\quad a_2=0{,}1548;\quad a_3=0{,}954;$$

$a_4=1$; $a_5=0$. Величина $R>0$, а значения параметров $M_2=0{,}35$; $N_2=-0{,}15$ в соответствии с формулами (3) и (6).

С помощью рис. 1, *б* находим, что ТК уравнения (12) имеют VI основной тип. Отмечая на комплексной плоскости частот расположение начальных точек и проводя асимптоты, используя таблицу, нетрудно качественно построить корневой годограф уравнения (12).

Подставляя в (10) и (11) численные значения a_i, находим $\omega_{k1}=2{,}57$; $K_{k1}=5{,}83$ и $\omega_{k2}=17{,}36$; $K_{k2}=-689{,}3$. При отрицательной обратной связи система устойчива в области $0\leqslant K<5{,}83$, а критической частотой является ω_{k1}.

Для уточнения динамических свойств системы можно построить полный корневой годограф (см. рис. 2, *б*). Величина $S_m\cong 0{,}6$ и достигается при $K\cong 0{,}3$ в ближайшей к мнимой оси двукратной точке. При $0<K\leqslant 0{,}3$ доминирующие корни действительные, при $0{,}3<K<5{,}83$ — комплексно-сопряженные.

Аналогично можно исследовать различные семейства ТК систем класса [5; 0]. Пусть, например, в рассматриваемом примере $0{,}04\leqslant T_4\leqslant 0{,}1$. По формулам (3) и (6) находим $R>0$ и строим параметрическую кривую $M_2=M_2(T_4)$, $N_2=N_2(T_4)$. На рис. 1, *б* она изображена пунктиром. По ней можно проследить за изменением типа ТК от T_4, а с помощью таблицы качественно построить семейство ТК уравнения (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961, т. 1, с. 40. [3] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, 14, № 1, с. 60.

Поступила в редакцию
09.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 539.125.516.4

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

И. А. Обухов, В. К. Перес-Фернандес

(кафедра квантовой теории)

В работе исследуются релятивистские волновые уравнения векторного поля во внешнем магнитном поле. Известный произвол в выборе лагранжиана векторного поля во внешнем электромагнитном поле позволяет ввести феноменологический параметр k, характеризующий магнитный момент частицы [1, 2]. Случай $k=1$ соответствует модели Вейнберга 1967 г. [1, 3]. При этом спиновый магнитный момент векторной частицы равен $\mu_Б$ — магнетону Бора, в выражении для которого масса m_e заменена на массу векторной частицы m [1]. В данной работе получены точные решения векторных уравнений как в случае $k=1$, так и для произвольных k. Найден спектр энергии векторной частицы в магнитном поле, согласующийся с результатами работы [2], в которой точные решения получены не были. Рассматриваются спиновые состояния частиц.

§ 1. **Уравнения поля.** Лагранжиан векторного поля во внешнем электромагнитном поле выберем в виде ($\hbar=c=1$)

$$L_k = -\frac{\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{2} \overset{*}{f}_{\mu\alpha} f_{\nu\beta} + m^2 \overset{*}{\varphi}_\mu \varphi^\mu + iekF^\mu_\nu \overset{*}{\varphi}_\mu \varphi^\nu, \tag{1}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ — тензор Минковского с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$, m, e — масса и заряд векторной частицы, $f_{\mu\nu} = D_\mu\varphi_\nu - D_\nu\varphi_\mu$, $D_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu$, A_μ — векторный потенциал внешнего поля, $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ [4].

Отметим, что замена $\overset{*}{\varphi}_\nu = W^-_\nu$ и $\varphi_\nu = W^+_\nu$ приводит к лагранжиану в работе [1]. Параметр k, как отмечалось выше, характеризует величину магнитного момента частицы [2].

Из (1) обычной процедурой (см. [4]) получим уравнение

$$[m^2 + D_\mu D^\mu]\varphi_\nu - D_\nu \frac{ie}{m^2}(1-k)(D_\mu F^{\mu\alpha}\varphi_\alpha) + iekF_{\nu\mu}\varphi^\mu = 0 \tag{2}$$

и дополнительное условие

$$D^\mu\varphi_\mu = \frac{ie}{m^2}(1-k)(D_\mu F^{\mu\nu}\varphi_\nu). \tag{3}$$

Уравнение и дополнительное условие для φ_ν^* получаются из (2), (3) заменой знака заряда на обратный. Отметим, что (2), (3) совпадают с соответствующими уравнениями в работе [2].

Векторный потенциал A_μ, описывающий постоянное магнитное поле напряженности h, направленное вдоль оси $z=x^3$, выберем в виде

$$A_\mu = (0,\ hy,\ 0,\ 0). \tag{4}$$

Здесь и далее считаем: $x^0=t$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$.

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\varphi_\nu = \exp\{-i(p_0 t + p_1 x + p_3 z)\}\Phi_\nu(y). \tag{5}$$

Тогда из (2), (4) легко получить:

$$\Box_h\Phi_0 - \frac{eh(1-k)}{m^2} p_0 \left\{\frac{d\Phi_1}{dy} + i(p_1 - ehy)\Phi_2\right\} = 0,$$

$$\Box_h\Phi_3 - \frac{eh(1-k)}{m^2} p_3 \left\{\frac{d\Phi_1}{dy} + i(p_1 - ehy)\Phi_2\right\} = 0,$$

$$\Box_h\Phi_1 - \frac{eh(1-k)}{m^2}(p_1 - ehy)\left\{\frac{d\Phi_1}{dy} + i(p_1 - ehy)\Phi_2\right\} + ieh(1+k)\Phi_2 = 0,$$

$$\Box_h\Phi_2 - \frac{ieh(1-k)}{m^2}\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Phi_1}{dy} + i(p_1 - ehy)\Phi_2\right\} - ieh(1+k)\Phi_1 = 0, \tag{6}$$

где

$$\Box_h = (p_1 - ehy)^2 + \mu^2 - \frac{d^2}{dy^2},\quad \mu^2 = m^2 + p_3^2 - p_0^2.$$

§ 2. **Решения для случая k=1 (модель Вейнберга 1967 г.).** В работе [1] отмечено, что в модели Вейнберга 1967 г. $k=1$, что связано с групповыми свойствами лежащего в основе теории лагранжиана Янга —

Миллса ($SU(2)\otimes U(1)$) [3]. Поскольку упомянутая модель Вейнберга является основой современной единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий, рассмотрим решения системы (6) в этом частном случае.

Нетрудно убедиться, что решения (6) при $k=1$, затухающие при $|y|\to\infty$, можно представить в виде

$$\Phi(y)=\frac{(|eh|/\pi)^{1/4}}{L(n!\,2p_0)^{1/2}}\exp\{-i(p_0t+p_1x+p_3z)\}\times$$

$$\times\{(C_0\Gamma_0+C_3\Gamma_3)\sqrt{n}\,D_{n-1}(\rho)+C_1\Gamma_1\sqrt{n(n-1)}\,D_{n-2}(\rho)+C_2\Gamma_2D_n(\rho)\}\quad(7)$$

при $\omega=eh/|eh|=1$ и

$$\Phi(y)=\frac{(|eh|/\pi)^{1/4}}{L(n!\,2p_0)^{1/2}}\exp\{-i(p_0t+p_1x+p_3z)\}\times$$

$$\times\{(C_0\Gamma_0+C_3\Gamma_3)\sqrt{n}\,D_{n-1}(\rho)+C_1\Gamma_1D_n(\rho)+C_2\Gamma_2\sqrt{n(n-1)}\,D_{n-2}(\rho)\}\quad(8)$$

при $\omega=-1$.

Здесь $n=0,1,2,\ldots$, $\rho=\sqrt{2/|eh|}\,(p_1-ehy)$, $D_n(\rho)$ — функция параболического цилиндра [5],

$$p_0^2=m^2+p_3^2+(2n-1)|eh|,\quad(9)$$

где Γ_r ($r=0,1,2,3$) — собственные векторы оператора $\hat S_3$ проекции спина частицы на направление поля (ось z), образующие ортонормированную систему:

$$\hat S_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0, & \sigma_2-i\sigma_1\\ \sigma_2+i\sigma_1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -i, & 0\\ 0, & i, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix},\quad(10)$$

$$\Gamma_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ \Gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix};\ \Gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix};\ \Gamma_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\hat S_3\Gamma_r=s_r\Gamma_r;\ s_0=s_3=0;\ s_1=-1;\ s_2=1.\quad(11)$$

Для того чтобы решения (7), (8) удовлетворяли дополнительному условию (3) и условию нормировки

$$\int\varphi^*_{p'}\varphi_p\frac{d^4x}{(2\pi)^4}=\delta(p_0-p_0')\,\delta(p_1-p_1')\,\delta(p_3-p_3')\,\delta_{nn'},\quad(12)$$

необходимо, чтобы постоянные C_r ($r=0,1,2,3$) удовлетворяли следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}p_3C_3-p_0C_0-\sqrt{|eh|}\,(\sqrt{n-1}\,C_1+\sqrt{n}\,C_2)=0,\\ |C_2|^2+|C_3|^2-|C_0|^2+|C_1|^2=1,\end{gathered}\quad(13)$$

$$\begin{gathered}p_3C_3-p_0C_0-\sqrt{|eh|}\,(\sqrt{n}\,C_1+\sqrt{n-1}\,C_2)=0,\\ |C_1|^2+|C_3|^2-|C_0|^2+|C_2|^2=1.\end{gathered}\quad(14)$$

Из (13), (14) видно, что решения (7), (8) вырождены по состояниям с фиксированной проекцией спина на направление поля. Невырожденным оказывается лишь основное состояние ($n=0$). Для него $s_3=1$ ($|C_2|=1$, $C_1=C_0=C_3=0$) при $\omega=1$ и $s_3=-1$ ($|C_1|=1$, $C_2=C_0=C_3=0$) при $\omega=-1$. Отсюда можно заключить, что положительно заряженная частица имеет в основном состоянии проекцию спина на направление поля, равную 1, а частица с отрицательным зарядом — равную -1 [6]. Отметим, что решения (7), (8) можно классифицировать по собственным значениям проекционного оператора:

$$\hat{P}=\begin{pmatrix}\sigma_3, & 0\\ 0, & -\sigma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix};\ \hat{P}\Gamma_r=\pi_r\Gamma_r,$$

$$\pi_{0,3}=1,\ \pi_{1,2}=-1. \tag{15}$$

Оператор $\hat{P}$ разбивает решения (7), (8) на два семейства, которые описывают: 1) частицы с проекцией спина, лежащей в плоскости, перпендикулярной направлению поля (оси z), 2) частицы с проекцией спина, направленной вдоль или против поля. То есть решения (7), (8) разбиваются на поперечно и продольно поляризованные относительно направления поля. При классификации решений по собственным значениям оператора $\hat{P}$ из (13), (14) и (7), (8) нетрудно получить

$$\Phi(y)\Big|_{\substack{\omega=1\\ \pi=1}}=\Phi(y)\Big|_{\substack{\omega=-1\\ \pi=1}}=$$

$$=\frac{(|eh|/\pi)^{1/4}}{L(2p_0)^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}\,\sqrt{p_0^2-p_3^2}}(p_3\Gamma_0+p_0\Gamma_3)D_{n-1}(\rho), \tag{16}$$

$$\Phi(y)\Big|_{\substack{\omega=1\\ \pi=-1}}=\frac{(|eh|/\pi)^{1/4}}{L(2p_0)^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}(\Gamma_2D_n(\rho)-n\Gamma_1D_{n-2}(\rho));$$

$$\Phi(y)\Big|_{\substack{\omega=-1\\ \pi=1}}=\frac{(|eh|/\pi)^{1/4}}{L(2p_0)^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}(\Gamma_1D_n(\rho)-n\Gamma_2D_{n-2}(\rho)). \tag{17}$$

Энергия основного состояния при $k=1$ имеет вид

$$p_0^2=m^2+p_3^2-|eh|. \tag{18}$$

При напряженности поля $|h|>m^2/|e|=h_{кр}$ ($p_3=0$) энергия основного состояния становится чисто мнимой. При массе частицы $m\sim30$ ГэВ (масса W-бозона) $h_{кр}\sim10^{23}$ Гс, т. е. на шесть порядков превышает напряженность поля внутри пульсаров $h\sim10^{17}$ Гс [7].

§ 3. **Случай произвольных k.** Несмотря на значительно более сложный вид уравнений (6) в случае произвольных k, легко убедиться, что они удовлетворяются решениями (7), (8). В случае $\omega=1$ подстановка решения (7) в систему (6) приводит к системе алгебраических уравнений:

$$C_0\left(n-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{|eh|(1-k)}{2m^2}\frac{p_0}{\sqrt{2|eh|}}(\sqrt{n-1}\,C_1-\sqrt{n}\,C_2)=0,$$

$$C_3\left(n-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{|eh|(1-k)}{2m^2}\frac{p_3}{\sqrt{2|eh|}}(\sqrt{n-1}\,C_1-\sqrt{n}\,C_2)=0,$$

$$C_1\left(n-\frac{3}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{(1+k)}{2}\right)-\frac{|eh|(1-k)}{2m^2}\sqrt{n-1}\,(\sqrt{n-1}\,C_1-\sqrt{n}\,C_2)=0,$$

$$C_2\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{(1+k)}{2}\right)-\frac{|eh|(1-k)}{2m^2}\sqrt{n}\,(\sqrt{n-1}\,C_1-\sqrt{n}\,C_2)=0, \tag{19}$$

где $\lambda=\frac{\mu^2}{|eh|}=\frac{m^2+p_3^2-p_0^2}{|eh|}$.

Условие совместности системы (19) приводит к уравнению спектра

$$\lambda^2+2\lambda\left[(2n-1)+\frac{|eh|(1-k)}{2m^2}\right]+(2n-1)^2-$$
$$-(1-k)^2+\frac{|eh|(1-k)k}{m^2}(2n-1)=0. \tag{20}$$

При $\omega=1$ дополнительное условие (3) также дает уравнение (20). В случае слабого поля ($|eh|\ll m^2$) из (19) нетрудно получить ($n=0$):

$$p_0^2=m^2+p_3^2-k|eh|. \tag{21}$$

Тогда решение уравнения (20), совместное с условием (21), можно записать в виде

$$\gamma=\frac{p_0^2-p_3^2}{m^2}=\left(1+\eta+\frac{\xi^2}{2}+\varepsilon\xi\sqrt{1+\eta+\frac{\xi^2}{4}}\right)-$$
$$-\frac{k\xi}{2}\left[\xi+2\varepsilon\sqrt{1+\eta+\frac{\xi^2}{4}}\right]=\left[\sqrt{1+\eta+\frac{\xi^2}{4}}+\frac{\varepsilon\xi}{2}\right]^2-$$
$$-\frac{k\xi}{2}\left[\xi+(2+\eta)\sqrt{1-\frac{\eta^2-\xi^2}{(2+\eta)^2}}\right], \tag{22}$$

где $\xi=\frac{|eh|}{m^2}$; $\eta=(2n-1)\xi$; $\varepsilon=\frac{2+\eta}{|2+\eta|}$.

Нетрудно видеть, что в случае $p_3=0$ (22) совпадает с результатом, полученным в работе [2]. Как и в [2], p_0^2 при $k=0$ становится положительно определенным при всех $n\geqslant 0$ и любых h.

Для системы (19) все определители третьего и второго порядка равны нулю. Это позволяет определить все коэффициенты C_r. То есть вырождение по состояниям с определенной проекцией спина частицы на направление поля полностью снимается при $k\neq 1$. Из выражений (19) и (20) получим

$$C_2=C,\ C_1=\tau C,\ C_0=-p_0\tau' C,\ C_3=-p_3\tau' C;$$
$$\tau=\frac{1}{\xi}\left[1-\frac{\xi}{2}-\varepsilon\sqrt{1+\eta+\frac{\xi^2}{4}}\right]+n;\ \tau|_{n=0,1}=0; \tag{23}$$
$$\tau'=\frac{1}{2\sqrt{|eh|}}\,\frac{1-\frac{\xi^2}{2}-\varepsilon\sqrt{1+\eta+\frac{\xi^2}{4}}}{\frac{\xi}{2}+\varepsilon\sqrt{1+\eta+\frac{\xi^2}{4}}};\ \tau'|_{n=0}=0.$$

В основном состоянии ($n=0$) частица, как и прежде ($k=1$), имеет при $\omega=1$, $s=1$. В случае $\omega=-1$ подстановка (8) в систему (6) приводит к тем же результатам относительно спектра (выражение (22)), в (23) следует поменять местами C_1 и C_2.

§ 4. **Заключение.** В работе получены точные решения релятивистских волновых уравнений, описывающих массивную заряженную векторную частицу в постоянном магнитном поле. Показано, что в модели Вейнберга 1967 г. ($k=1$) решения оказываются вырожденными по состояниям с определенной проекцией спина частицы на направление поля. Введение феноменологического магнитного момента частицы $k\neq1$ полностью снимает вырождение. Получены выражения для энергии частицы в поле как в случае $k=1$, так и в случае произвольных k. Основное состояние ($n=0$) оказывается невырожденным при любых k. Энергия основного состояния становится мнимой при $|h|>h_{кр}$ ($m\sim$ ~30 ГэВ, $h_{кр}\sim10^{23}$ Гс) в случае $k=1$. При $k=0$ квадрат энергии (p_0^2) положительно определен для любой напряженности поля, как и в работе [2]. Выражение для энергии при $p_3=0$ в точности совпадает с полученным в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бернстейн Дж. В кн.: Новости фундаментальной физики, вып. 8. Квантовая теория калибровочных полей. М., 1977, с. 120—240. [2] Tsai Wu-yang, Yildiz Asim. Phys. Rev., 1971, D-4, № 12. p. 3643. [3] Salam A., Word J. C. Phys. Lett., 1964, 13, № 2, p. 168. [4] Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980. [5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, т. 2. [6] Соколов А. А., Тернов И. М. и др. В кн.: Синхротронное излучение. М.: Наука, 1966, с. 72. [7] Зельдович Я. Б. УФН, 1975, 115, № 2, с. 161.

Поступила в редакцию
15.04.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 535.241.13:534

АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

В. И. Балакший, Х. А. Упасена (Шри Ланка)

(кафедра физики колебаний)

1. **Введение.** В подавляющем большинстве работ, посвященных акустооптическому (АО) взаимодействию, рассматривается дифракция плоской световой волны на монохроматической акустической волне. Однако в реальных АО устройствах используются ограниченные волновые пучки. Конечные размеры области взаимодействия существенно влияют на все основные характеристики этих устройств: разрешение, быстродействие, потребляемую мощность. Поэтому учет размеров области взаимодействия является совершенно необходимым для правильного описания работы АО устройств.

При рассмотрении АО взаимодействия ограниченных пучков можно выделить два предельных случая: 1) дифракцию сфокусированного светового пучка на монохроматической акустической волне; 2) дифракцию плоской световой волны на коротком акустическом цуге. Первый случай реализуется в АО модуляторах и дефлекторах света [1, 2], второй — в АО устройствах зондирования световых полей [3]. В данной работе рассмотрены оба этих случая и показано, что даже при одинаковых размерах области взаимодействия имеются существенные различия в структуре поля дифрагированного света и в характере зависимости эффективности дифракции от параметров АО ячейки.