

NiCl_2 этой зависимости не следует. Выбранные координаты позволяют выделить небольшой вклад ядерной теплоемкости в соединениях *I*, *II* и CoCl_2 порядка

$$C_{\text{яд}} \sim 6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{T^2} \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{град}}.$$

В области температур 1,8—2,3 К теплоемкости соединений *I*, *II* и CoCl_2 близки между собой. При более высоких температурах, когда, видимо, возбуждается низкочастотная ветвь спиновых волн магнитная теплоемкость соединений *I* и *II* становится больше, чем у CoCl_2 (следует отметить, что величина щели низкочастотной ветви $\text{CoCl}_2 \sim 2,8$ К [10], а у $\text{NiCl}_2 \sim 0,5$ К [13]).

Учитывая, что магнитная теплоемкость CoCl_2 описывается выражением вида [8]

$$\frac{C_{\text{маг}}}{R} = 0,66 \frac{k_B^3 T^3}{8s^3 AB^{1/2} (B+D)^{3/2}},$$

увеличение магнитной теплоемкости соединений *I* и *II* можно объяснить уменьшением эффективной анизотропии $(Ds)_{\text{эфф}}$ при увеличении концентрации Ni^{+2} (величина $Ds/k_B \sim 58$ К в CoCl_2 и $\sim 0,8$ К в NiCl_2). Эффективная величина $(As)_{\text{эфф}}$ при увеличении концентрации Ni^{+2} видимо, растет, как это следует из данных для соединения *III*. Значения Bs/k_B в исходных хлоридах Ni и Co близки.

В NiCl_2 невелики как граничная энергия по k_z , так и щель высокочастотной ветви ($\Delta/k_B = 3,7$ К) и закон T^3 для магнитной теплоемкости не выполняется при гелиевых температурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Busey R. H., Giaque W. F. J. Amer. Chem. Soc., 1952, 74, p. 4443.
 [2] Chisholm R. C., Stout J. M. J. Chem. Phys., 1962, 36, p. 972. [3] Кострюкова М. О. ЖЭТФ, 1968, 55, с. 453. [4] Кострюкова М. О. ЖЭТФ, 1975, 69, с. 1853. [5] Landau L. D. Phys. Zeitschrift Sowjetunion, 1933, 4, p. 675.
 [6] Kanamori J. Progr. Theor. Phys., 1958, 20, p. 890. [7] Jacobs I. S., Roberts S., Silverstein S. D. J. Appl. Phys., 1968, 39, p. 816. [8] Yoshimori A. Phys. Rev., 1963, 130, p. 1312. [9] Katsumata K., Yamasaka K. J. Phys. Soc. Jap., 1973, 34, p. 346. [10] Лозенко А. Ф., Рябченко С. М. ЖЭТФ, 1973, 65, с. 1085. [11] Брагин Ф. В., Рябченко С. М. ФТТ, 1973, 15, с. 1050.
 [12] Лифшиц И. М. ЖЭТФ, 1952, 22, с. 475. [13] Кострюкова М. О., Каширская Л. М. Письма в ЖЭТФ, 1969, 9, с. 400—404.

Поступила в редакцию
14.12.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, Т. 23, № 5

УДК 530.12:531.51

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА КАК ТОЖДЕСТВА В ТЕОРИИ ПРЯМОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А. Ю. Турыгин

(кафедра теоретической физики)

В работе [1] для произвольно заданного фона $g_{\alpha\beta}$ построено действие фоккеровского типа в произвольном порядке по константе гравитационного взаимодействия k для пробной частицы, взаимодействующей с некоторой системой, характеризующейся заданным тензором энергии-импульса (ТЭИ) $T^{\mu\nu} = \sum_m k^m T^{\mu\nu}$. Доказано, что уравнениями дви-

жения пробной частицы, следующими из этого принципа, являются уравнения геодезической линии в эффективной метрике, имеющей вид

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^{n\gamma} &= g_{\alpha\beta} - \sum_{i=1}^n k^i \sigma_{\alpha\beta}^i, \quad \sigma_{\alpha\beta}^1 = 2h_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha\beta}^m &= 2\theta_m^{m-1} h_{\alpha\beta} - 2 \sum_{i=1}^{m-1} \theta_m^i \int \frac{\delta \sigma_{\alpha\beta}^i}{\delta g_{\mu\nu}} h_{\mu\nu}^{m-1-i} dx, \quad m \geq 2, \\ h_{\mu\nu}^i &= 4\pi\eta_i \int \bar{G}_{\mu\nu\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x', \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{G}_{\mu\nu\alpha\beta}(x, x')$ — битензорная симметричная функция Грина, η_i — произвольные числа, $\theta_m = \{1, m=0; 1/m, m \neq 0\}$.

В работе [1] отмечалось, что кроме η_i в (1) возможны и другие, не указанные явно, произвольные коэффициенты. Целью данной работы является их конкретизация и доказательство тождественного выполнения уравнений Эйнштейна на каждом шаге итераций.

Прежде всего заметим, что нужно выбрать $\eta_i=1$ для всех i ($\eta_0=1$ из принципа соответствия с теорией Ньютона). Это вытекает из следующего рассуждения. Определим действие для системы точечных частиц аналогично тому, как это сделано в работе [1]. Получим из этого действия уравнения движения выделенной частицы. Затем потребуем, чтобы эти уравнения движения в предположении пробности выделенной частицы сводились к уравнениям геодезической линии в некоторой эффективной метрике в любом порядке по k . Очевидно, что это возможно только при $\eta_i=1$ для всех i , так как только в этом случае получим для каждой частицы одно и то же по виду действие, причем его вид будет совпадать с видом действия работы [1]. Однако не все коэффициенты (не указанные явно) в формуле (1) определяются этим однозначно.

Предположим, что перед слагаемыми в действии порядка k^n можно ставить только один, общий коэффициент. Тогда эффективный метрический тензор в n -м порядке определяется в точности формулами (1), где все $\eta_i=1$. Частичным подтверждением правильности этого предположения служит возможность получения во втором приближении лагранжевой функции, найденной в ОТО Фихтенгольцем [2].

Докажем, что эффективная метрика (1) тождественно удовлетворяет уравнениям Эйнштейна. Из (1) в том же приближении находим

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta n\gamma} &= g^{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^n k^i \rho^{\alpha\beta i}, \\ \rho^{\alpha\beta 1} &= \sigma^{\alpha\beta}; \quad \rho^{\alpha\beta m} = \sigma^{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_{\gamma}^{\alpha} \rho^{\gamma\beta m-i}, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя (1) и (2), вычислим символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha n\gamma} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + L_{\mu\nu}^{\alpha} + \chi_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (3)$$

$$L_{\mu\nu}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k^i (\sigma_{\mu;\nu}^{\alpha} + \sigma_{\nu;\mu}^{\alpha} - \sigma_{\mu\nu}^{;\alpha}), \quad (4)$$

$$\chi_{\mu\nu}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k^i \rho^{\alpha\sigma} (\sigma_{\sigma\mu; \nu} + \sigma_{\sigma\nu; \mu} - \sigma_{\mu\nu; \sigma}), \quad (5)$$

где ; означает ковариантную производную в метрике фона, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ — символы Кристоффеля этой метрики.

Из (1) — (5) найдем выражение для тензора Эйнштейна. Запишем его, выделив линейную по $\sigma_{\alpha\beta}$ ($1 \leq i \leq n$) часть

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k^i (\sigma_{\mu; \nu; \alpha}^{\alpha} + \sigma_{\nu; \mu; \alpha}^{\alpha} - \square \sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu; \nu} - \\ - g_{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} + g_{\mu\nu} \square \sigma - R \sigma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R \sigma^{\alpha\beta}) + \Phi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Явный вид тензора $\Phi_{\mu\nu}$ не требуется для решения поставленной задачи. Так как фон в этом подходе не динамичен, то необходимо $G_{\mu\nu} = 0$, т. е. $R_{\alpha\beta} = 0$ [3]. Тогда из (1), (6) получаем

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} = k G_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \left(\sum_{i=1}^n k^{i-1} h_{\sigma\tau}^{-1} \right) - G_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \left[\sum_{i=2}^n k^i (1 - \theta_i) h_{\sigma\tau}^{i-1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k^i \theta_i \int \frac{\delta \sigma_{\sigma\tau}}{\delta g_{\alpha\beta}} h_{\alpha\beta}^{i-j} d^4 x \right] + \Phi_{\mu\nu} \equiv k G_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \bar{\Phi}_{\sigma\tau}^{n-1} + \bar{B}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{\Phi}_{\sigma\tau}^{n-1} \equiv \sum_{i=1}^n k^{i-1} h_{\sigma\tau}^{i-1},$$

$$\bar{G}_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \equiv g_{\mu}^{\sigma} g_{\nu}^{\tau} \square + g^{\sigma\tau} \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} - g_{\mu}^{\sigma} \nabla^{\tau} \nabla_{\nu} - g_{\nu}^{\sigma} \nabla^{\tau} \nabla_{\mu} - g^{\sigma\tau} g_{\mu\nu} \square + g_{\mu\nu} \nabla^{\sigma} \nabla^{\tau}.$$

Возьмем от обеих частей (7) ковариантную дивергенцию в метрике $g_{\alpha\beta}$ (обозначим ее ∇^{ν}). Используя (3) — (5), выделяя ковариантную дивергенцию в метрике фона (∇^{ν}) от первого слагаемого в правой части (7) и обозначая оставшийся вектор через $\bar{D}_{\mu}$, находим

$$\nabla^{\nu} \bar{G}_{\mu\nu}^n = k \nabla^{\nu} G_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \bar{\Phi}_{\sigma\tau}^{n-1} + \bar{D}_{\mu}. \quad (8)$$

Так как $\nabla^{\nu} \bar{G}_{\mu\nu}^n \equiv 0$, $\nabla^{\nu} G_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \bar{\Phi}_{\sigma\tau}^{n-1} \equiv 0$, то

$$\bar{D}_{\mu} = 0. \quad (9)$$

Далее

$$\begin{aligned} k G_{\mu\nu}^{\sigma\tau} \bar{\Phi}_{\sigma\tau}^{n-1} = k \left[\square \left(\bar{\Phi}_{\mu\nu}^{n-1} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \bar{\Phi}^{n-1} \right) + 2 \bar{\Phi}_{\gamma\delta} R_{\mu\nu}^{\gamma\delta} - \right. \\ \left. - \left(\bar{\Phi}_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} \bar{\Phi}^{n-1} \right)_{;\alpha\nu} - \left(\bar{\Phi}_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} \bar{\Phi}^{n-1} \right)_{;\alpha\mu} + \right. \\ \left. + g_{\mu\nu} \left(\bar{\Phi}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \bar{\Phi}^{n-1} \right)_{;\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Считая ТЭИ системы ковариантно сохраняющимся ($T^{\alpha\beta}_{;\beta}=0$) и используя уравнение для функции Грина, так же как в работе [3], получим

$$k \left(\Phi_{\mu}^{n-1} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} \Phi^{n-1} \right)_{;\alpha} = 0, \quad (11)$$

$$k \left[\square \left(\Phi_{\mu\nu}^{n-1} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi^{n-1} \right) + 2 \Phi_{\gamma\delta} R_{\mu\nu}^{\gamma\delta} \right] = \kappa \sum_{i=1}^n k^{i-1} T_{\mu\nu}^{i-1} \quad (12)$$

($\kappa = 8\pi k$). Из (7), (10) — (12) тогда следует

$$\dot{G}_{\mu\nu} = \kappa \sum_{i=1}^n k^{i-1} T_{\mu\nu}^{i-1} + B_{\mu\nu}, \quad (13)$$

причем вследствие (8), (9)

$$0 \equiv \nabla^{\nu} \dot{G}_{\mu\nu} = \kappa \nabla^{\nu} \left(\sum_{i=1}^n k^{i-1} T_{\mu\nu}^{i-1} \right). \quad (14)$$

Если принять, что ковариантное сохранение ТЭИ системы является следствием ее уравнений движения, то (14) означает получение их из (13) обычным способом. Поэтому правая часть (13) имеет смысл умноженного на κ ТЭИ $n-1$ -го порядка системы в эффективной метрике (1). Следовательно, все соотношение (13) имеет смысл уравнений Эйнштейна в n -м порядке. Но в данном случае (13) — тождества, т. е. уравнения Эйнштейна выполняются тождественно в n -м порядке, а поскольку n произвольно, то это верно в любом порядке.

Заметим, что тождествами, аналогичными тождествам в электродинамике Уилера—Фейнмана [4], здесь являются (11) и (12). Тождество (13) получается добавлением к обоим частям (12) одинаковых слагаемых.

Если включить в уравнения Эйнштейна Λ -член, то фоновая метрика будет удовлетворять условию $R_{\mu\nu} - (1/4)g_{\mu\nu}R = 0$. Полученный выше вывод сохранит свою силу и в этом случае [2].

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Владимирову за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Турыгин А. Ю. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1982, 23, № 2, с. 69. [2] Турыгин А. Ю. Деп. ВИНТИ № 1352-82 Деп. [3] Турыгин А. Ю. Изв. вузов. Сер. Физика, 1981, № 6, с. 82. [4] Wheeler J. A., Feynman R. P. Rev. Mod. Phys., 1949, 21, p. 425.

Поступила в редакцию
21.12.81