

УДК 534.2

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РЕФРАКЦИИ

С. В. Байков, В. А. Буров, А. А. Горюнов, А. В. Сасковец

(кафедра акустики)

1. Целью настоящей работы является расширение области применимости итерационных методов решения обратных задач рефракции, в которых рассматривается рассеяние волн на неоднородностях скорости распространения возмущения в среде при постоянной ее плотности. Волновое уравнение для скалярного поля с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ в среде, неоднородность фазовой скорости $c=c(\mathbf{r})$ в которой локализована в области рассеяния $\mathcal{R} \in R_3$ ($c(\mathbf{r})=c_0$, если $\mathbf{r} \notin \mathcal{R}$), будет:

$$\Delta U + [k_0^2 - \varepsilon(\mathbf{r})]U = f,$$

или

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k_0^2 u(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r}) U_0(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Здесь $U_0(\mathbf{r})$ — падающее первичное поле от источников f , локализованных в области излучения $X \in R_3$, $u(\mathbf{r})$ — рассеянное поле, наблюдаемое в области приема $Y \in R_3$, а параметр $\varepsilon(\mathbf{r})$ связан со скоростью $c(\mathbf{r})$ соотношением

$$c^2(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2 c_0^2}{\omega^2 - c_0^2 \varepsilon(\mathbf{r})}.$$

С помощью функции Грина свободного пространства

$$g_0(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = -(4\pi |\mathbf{s} - \mathbf{s}'|)^{-1} \exp\{ik_0 |\mathbf{s} - \mathbf{s}'|\}$$

можно ввести следующие три оператора распространения поля

из X в \mathcal{R} : $P_0 \Psi = \int_X g_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$

из \mathcal{R} в \mathcal{R} : $R_0 \Psi = \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \tag{2}$

из \mathcal{R} в Y : $Q_0 \Psi = \int_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{y}, \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$

где $\mathbf{x} \in X$; $\mathbf{y} \in Y$; $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathcal{R}$.

Используя операторные обозначения (2), перейдем от (1) к интегральным выражениям, связывающим наблюдаемое на Y рассеянное поле $u(\mathbf{y})$ с рассеянным полем $u(\mathbf{r})$ внутри \mathcal{R} , источниками облучающего поля f и неоднородностью среды ε :

$$u\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}\right) = \left(\begin{matrix} Q_0 \\ R_0 \end{matrix}\right) \{\varepsilon(\mathbf{r}') [u(\mathbf{r}') + P_0 f(\mathbf{x})]\}. \tag{3}$$

Последовательное (итерационное) применение (3) дает представление поля в виде ряда Борна — Неймана, описывающего процесс многократного рассеяния поля

$$u = Q_0 \left[E + \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon R_0)^n \right] \varepsilon P_0 f, \tag{4}$$

здесь $\varepsilon(\mathbf{r})$ рассматривается как оператор умножения на функцию. Ряд (4) сходится при условии, что в каждом отдельном акте перерасcеяния мощность вторичного поля меньше мощности падающего, т. е.

$$\|\varepsilon R_0\| < 1, \text{ где } \|\cdot\| \text{ — норма в } L_2(\mathcal{R}).$$

Используя операцию обращения оператора $[\cdot]^{-1}$, (4) можно записать в виде

$$u = Q_0 [E - \varepsilon R_0]^{-1} \varepsilon P_0 f. \quad (5)$$

Решение совокупности уравнений вида (5), соответствующих различным конфигурациям источников f и различным частотам облучающего поля, относительно ε и составляет математическое содержание обратной задачи рефракции. Решение этих нелинейных уравнений содержит в явной или неявной форме оценку (по значениям вторичного поля) вида мнимых источников, возбуждаемых первичным полем, т. е. требует решения уравнений Фредгольма первого рода и нуждается в той или иной форме регуляризации.

Подход к решению уравнений вида (5) как к статистической оценке рассеивателя дан в работе [1].

2. Итерационный метод решения уравнения (5) в простейшем виде состоит в решении цепочки линеаризованных уравнений

$$u = Q_0 [E - \varepsilon_{n-1} R_0]^{-1} \varepsilon_n P_0 f. \quad (6)$$

Несложно показать, что процесс (6) сходится при выполнении условия [2]

$$|u(\mathbf{r})/U_0(\mathbf{r})| < 1; \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}, \quad (7)$$

а относительная ошибка после N итераций

$$\sim |u/U_0|^N.$$

Этот алгоритм является обобщением метода, также справедливого лишь для достаточно слабых рассеивателей, который предложен в работах [3, 4]. Процедура (6) эквивалентна и алгоритму, разработанному в работе [5] применительно к одномерной задаче рассеяния.

Итерационные алгоритмы удобны тем, что процедура регуляризации может выполняться на каждом шаге итераций и тем самым может быть сведена к сравнительно простым операциям фильтрации.

3. Условие (7) является с практической точки зрения чрезвычайно жестким, так как исключает случаи образования каустик или значительных фокусировок поля, при которых рассеянное поле превышает по интенсивности первичное. Это исключает возможность применения алгоритма (6) для решения многих задач акустики. Частично ослабить данный недостаток можно, если априори известно значение $\varepsilon_1(\mathbf{r})$, достаточно близкое к $\varepsilon(\mathbf{r})$. В этом случае, используя операторы Q_1, R_1, P_1 , построенные на основе функций Грина для среды с неоднородностью ε_1 :

$$\Delta g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [k_0^2 - \varepsilon_1(\mathbf{r})] g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

можно переписать уравнение (5) для поля $u_1(\mathbf{r})$, рассеянного неоднородностью $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_1$. Очевидно, что условие (7) при этом смягчается, так как теперь оно относится к полю u_1 , рассеянному добавкой, и, следовательно, может выполняться при малом $\Delta\varepsilon$.

Аналогичный прием решения лежит в основе метода касательных Ньютона, функциональное обобщение которого дано Канторовичем [6]. Итерационная процедура, построенная на его основе и представленная

в работах [7, 8], фактически сводится к решению цепочки уравнений вида (5) в борновском приближении:

$$U_0 + u = Q_{n-1} \varepsilon_n P_{n-1} f + P_{n-1} f, \quad (8)$$

где Q_{n-1} и P_{n-1} являются операторами распространения в среде с неоднородностью ε_{n-1} . Сходимость данного алгоритма определяется выбором начального приближения ε_1 , обеспечивающего выполнение (7) на первом шаге, а нарастающая с каждым шагом итераций скорость сходимости выше, чем в алгоритме (6).

4. Устранить трудновыполнимое требование на правильный выбор начального приближения ε_1 и обеспечить решение обратной задачи во всех случаях можно следующим образом. Представим рассеянное поле $u(\mathbf{y})$ в виде суммы

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^M u^{(m)}(\mathbf{y}).$$

Рассмотрим далее следующую последовательность уравнений для определения функций $\varepsilon^{(m)}(\mathbf{r})$:

$$u^{(m)}(\mathbf{y}) = Q_{m-1} [E - \varepsilon^{(m)} R_{m-1}]^{-1} \varepsilon^{(m)} P_{m-1} f, \quad m = 1, \dots, M, \quad (9)$$

где операторы Q_{m-1} , R_{m-1} и P_{m-1} учитывают перерассеяние на суммарной неоднородности $\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{(j)}$, определенной из решения предыдущих уравнений:

$$Q_{m-1} = Q_{m-2} [E - \varepsilon^{(m-1)} R_{m-2}]^{-1} = Q_0 \left[E - \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{(j)} R_0 \right]^{-1},$$

$$R_{m-1} = R_{m-2} [E - \varepsilon^{(m-1)} R_{m-2}]^{-1} = R_0 \left[E - \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{(j)} R_0 \right]^{-1},$$

$$P_{m-1} = [E - R_{m-2} \varepsilon^{(m-1)}]^{-1} P_{m-2} = \left[E - R_0 \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon^{(j)} \right]^{-1} P_0,$$

а Q_0 , R_0 и P_0 соответствуют однородной задаче. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\sum_{m=1}^M \varepsilon^{(m)}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}).$$

Решать каждое из уравнений (9) можно, используя рассмотренные ранее алгоритмы (6) или (8) с нулевым начальным значением ε . При этом сходимость таких итераций для каждого m обеспечивается величиной M , т. е. выбором такого разбиения рассеянного поля, чтобы на каждом этапе решения выполнялось условие типа (7).

5. Одним из простейших способов является равномерное разбиение поля:

$$u^{(1)}, \dots, u^{(M)} = u/M.$$

Оценить оптимальное число разбиений M , обеспечивающее минималь-

ную ошибку при фиксированном общем числе k решаемых уравнений вида (6), можно из оценки ошибки [2]

$$\frac{\delta e}{e} \sim \left| \frac{u/M}{U_0} \right|^{k/M} \rightarrow \min_M$$

Варьирование по M дает

$$\frac{|u|}{M_{\text{опт}}} \sim \frac{|U_0|}{e}$$

т. е. разбиение должно ослабить рассеянное поле примерно в e раз по сравнению с падающим.

6. При решении уравнения (5) возникает существенная неопределенность в оценке формы рассеивателя, обусловленная некорректностью задачи определения вторичных источников [9]. Устранение этой неопределенности достигается использованием данных о рассеянии при множестве (вообще говоря непрерывном) измерений на различных частотах и (или) при различных конфигурациях источников f . На практике такие измерения проводятся на дискретном множестве частот и при дискретном наборе конфигураций f и точек наблюдения поля. Такая организация измерений удобна и в техническом отношении, так как сокращает количество необходимых точек приема. Рассеиватель же в этом случае характеризуется конечным числом параметров, например значениями ε в дискретном числе точек или конечным набором коэффициентов разложения ε по некоторому базису. Уравнение вида (5) в этой ситуации переходит в систему уравнений

$$u(r, v, l) = Q(v, l) [E - \varepsilon R(v)]^{-1} \varepsilon P(v, l) f(v, l), \quad (10)$$

$$v=1, \dots, N; l=1, \dots, L,$$

где v, l — частотный и конфигурационный индексы соответственно. Для разрешимости системы (10) необходимо, чтобы произведение числа рабочих частот на число конфигураций облучающего поля U_0 и на число точек измерения было не меньше числа параметров, описывающих рассеиватель. Непосредственное решение системы (10) не представляется возможным, применение же итерационных алгоритмов типа (9) позволяет ее разрешить.

7. Приведенные выше алгоритмы моделировались на ЭВМ. Алгоритм (6) проверялся как для случая квадратной матрицы Q (число рассеивающих узлов равно числу приемников), так и для неквадратной Q (число приемников меньше числа рассеивающих узлов, однако измерения проводились для ряда облучающих апертур и различных частот). Моделирование прямой и обратной задач рассеяния на дискретных рассеивателях различных конфигураций (Γ -образной линейной эквидистантной и регулярной двумерной сетки в трехмерном пространстве) показало хорошее совпадение с теоретическими результатами. При проверке алгоритма (9) в качестве $\varepsilon^{(0)}$ бралось $\varepsilon^{(0)}=0$, а $M=2$. В этом случае алгоритм сходил за $\sim 2 \times 90$ шагов, давая относительную ошибку 10^{-6} , в то время как использование алгоритма (5) приводило к расходимости итераций и давало переполнение АУ за ~ 10 шагов ($|u/U_0| \sim 2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Буров В. А., Горюнов А. А. Вести. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, 18, № 6, с. 95. [2] Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В. Вести. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1982, 23, № 6, с. 87. [3] Prosser R. T. J. Math. Phys., 1969, 10, p. 1819. [4] Prosser R. T. J. Math. Phys., 1976, 17, p. 1775.

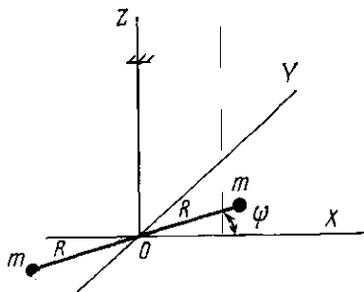
УДК 53.088:528.565

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В. С. Назаренко

(ГАИШ)

Для измерения вторых производных гравитационного потенциала необходимо иметь систему из двух или более пробных масс, разнесенных в пространстве, и прибора, регистрирующего относительные ускорения этих масс. Как и в других физических экспериментах с пробными телами, предельная точность таких измерений ограничивается, во крайней мере, двумя принципиально неустранимыми факторами — броуновским движением пробных масс (тепловой предел) и собственными шумами регистрирующего прибора (инструментальный предел). Для определенности рассмотрим классическую схему градиентометра,



в котором пробные массы m укреплены на концах невесомого коромысла длиной $2R$, подвешенного на нити с крутильной жесткостью D (рисунок). Предположим следующее: крутильный осциллятор имеет одну степень свободы — поворот в плоскости XY ; угловые перемещения коромысла регистрируются прибором непрерывного действия, собственные шумы которого имеют равномерную спектральную плотность N_0 ; время

наблюдения ограничено заданной величиной τ ; осциллятор находится в термостате, имеющем температуру T , и единственным источником случайных воздействий являются тепловые флуктуации. Цель работы — оценить предельную точность измерения вторых производных гравитационного потенциала, достижимую при указанных условиях.

Уравнение движения рассматриваемого осциллятора в гравитационном поле с потенциалом $W(x, y, z)$ нетрудно получить, если разложить функцию $W(x, y, z)$ в начале координат в ряд Тейлора, ограничиваясь вторыми производными (случай слабо неоднородного поля). Тогда получим

$$\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = W_{xy} \cos 2\psi + W_{\Delta} \sin 2\psi, \quad (1)$$

где $\psi(t)$ — угловая координата гантели; $\delta \equiv H/2J$, H — коэффициент трения; $J \equiv 2mR^2$ — момент инерции гантели;

$$\omega_0^2 \equiv D/J; \quad W_{xy} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad W_{\Delta} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right).$$