[5] Roger A. Lecture Notes in Physics, 1978, 85, p. 200. [6] Канторович Л. В. ДАН СССР, 1948, 59, с. 1237. [7] Roger A. IEEE transactions on antennas and propagation, 1981, AP-29, p. 232. [8] Coen S., Mei K. K., Angelakos D. J. IEEE transactions on antennas and propagation, 1981, AP-29, p. 298. [9] Devaney A. J. J. Math. Phys., 1978, 19, N 7, p. 1526.

Поступила в редакцию
03.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 6

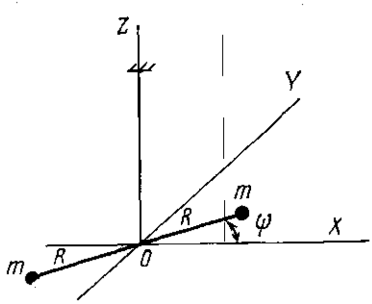
УДК 53.088:528.565

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В. С. Назаренко

(ГАИШ)

Для измерения вторых производных гравитационного потенциала необходимо иметь систему из двух или более пробных масс, разнесенных в пространстве, и прибора, регистрирующего относительные ускорения этих масс. Как и в других физических экспериментах с пробными телами, предельная точность таких измерений ограничивается, по крайней мере, двумя принципиально неустранимыми факторами — броуновским движением пробных масс (тепловой предел) и собственными шумами регистрирующего прибора (инструментальный предел). Для определенности рассмотрим классическую схему градиентометра, в котором пробные массы m укреплены на концах невесомого коромысла длиной $2R$, подвешенного на нити с крутильной жесткостью D (рисунок). Предположим следующее: крутильный осциллятор имеет одну степень свободы — поворот в плоскости XY; угловые перемещения коромысла регистрируются прибором непрерывного действия, собственные шумы которого имеют равномерную спектральную плотность N_0; время наблюдения ограничено заданной величиной τ; осциллятор находится в термостате, имеющем температуру T, и единственным источником случайных воздействий являются тепловые флуктуации. Цель работы — оценить предельную точность измерения вторых производных гравитационного потенциала, достижимую при указанных условиях.



Уравнение движения рассматриваемого осциллятора в гравитационном поле с потенциалом $W(x, y, z)$ нетрудно получить, если разложить функцию $W(x, y, z)$ в начале координат в ряд Тейлора, ограничиваясь вторыми производными (случай слабо неоднородного поля). Тогда получим

$$\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = W_{xy}\cos 2\psi + W_\Delta \sin 2\psi, \tag{1}$$

где $\psi(t)$ — угловая координата гантели; $\delta \equiv H/2J$, H — коэффициент трения; $J \equiv 2mR^2$ — момент инерции гантели;

$$\omega_0^2 \equiv D/J; \quad W_{xy} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad W_\Delta \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right).$$

Уравнение движения (1) нелинейно относительно ψ и в общем случае аналитически не решается. Его можно линеаризовать, если рассматривать малые колебания гантели около положения равновесия φ_0:

$$\psi(t)=\varphi_0+\varphi(t);\ \varphi(t)\ll 1, \tag{2}$$

что оправдывается малостью W_{xy} и W_Δ в реальных полях. Подставляя (2) в (1) и разлагая правую часть (1) в ряд по φ с точностью до первой степени, получим

$$\ddot{\varphi}+2\delta\dot{\varphi}+[\omega_0^2-\Gamma_2(\varphi_0)]\,\varphi=\Gamma_1(\varphi_0), \tag{3}$$

где введены обозначения:

$$\Gamma_1(\varphi_0)\equiv W_\Delta\sin 2\varphi_0+W_{xy}\cos 2\varphi_0,$$
$$\Gamma_2(\varphi_0)\equiv W_\Delta\cos 2\varphi_0-W_{xy}\sin 2\varphi_0. \tag{4}$$

Решением уравнения (3) являются свободные затухающие колебания:

$$\psi(t)=\varphi_0+\varphi(t)=\varphi_0+\gamma+\psi_0\exp(-\delta t)\cos(\omega t+\beta_0), \tag{5}$$

где

$$\gamma=\Gamma_1(\varphi_0)/[\omega_0^2-\Gamma_2(\varphi_0)];\ \omega^2=\omega_1^2-\Gamma_2(\varphi_0);\ \omega_1^2\equiv\omega_0^2-\delta^2. \tag{6}$$

Величины ψ_0 и β_0 определяются начальными условиями. Таким образом, из (3) и (6) следует, что в неоднородном гравитационном поле происходит сдвиг положения равновесия осциллятора и изменение частоты собственных колебаний. Если $|\Gamma_2(\varphi_0)|\ll\omega_0^2$, что для гравитационного поля Земли справедливо при $\tau_0\equiv 2\pi\,\omega_0^{-1}\leqslant 10^3$ с, то формулы (6) могут быть упрощены:

$$\gamma=\Gamma_1(\varphi_0)/\omega_0^2;\ \Omega\equiv|\omega-\omega_1|=\Gamma_2(\varphi_0)/\omega_1. \tag{7}$$

В зависимости от того, какой именно параметр — γ или Ω — используется для нахождения вторых производных потенциала, будем называть метод измерения статическим или динамическим соответственно Сравнительно недавно был предложен модуляционный метод измерения. Идея этого метода состоит в том, что осциллятор вместе с регистрирующим прибором помещается на платформу, равномерно вращающуюся вокруг оси крутильной нити с некоторой частотой p. Тогда $\varphi_0=pt$, и момент гравитационных сил, действующих на гантель, оказывается периодическим. Уравнение движения (1) переходит в уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{\varphi}+2\delta\dot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=W_{xy}\cos 2pt+W_\Delta\sin 2pt, \tag{8}$$

Параметрами, зависящими от искомых W_{xy} и W_Δ, в модуляционном методе оказываются амплитуды квадратурных компонент вынужденных колебаний, которые максимальны, если частота вращения p удовлетворяет условию резонанса: $2p\approx\omega_0$. Если W_{xy} и W_Δ «включаются» при $t=0$, то решение уравнения (8) имеет вид колебаний с нарастающей амплитудой:

$$\varphi(t)=\exp(-\delta t)(A\sin\omega_1 t+B\cos\omega_1 t)+at\sin 2pt+bt\cos 2pt, \tag{9}$$

где $a\equiv W_{xy}/2\omega_0$; $b\equiv -W_\Delta/2\omega_0$. Величины A и B определяются начальными условиями. Формула (9) справедлива на интервале времени $(0,\tau)$, много меньшем времени релаксации осциллятора $\tau^*=1/\delta$, что в дальнейшем и предполагается.

Перейдем к оценке предельной точности трех рассмотренных методов измерения.

С учетом собственных шумов $n(t)$ регистрирующего прибора сигнал $u(t)$ на его выходе имеет вид

$$u(t)=\varphi(t, \lambda)+n(t), \tag{10}$$

где $\varphi(t, \lambda)$ — полезный сигнал вида (5) или (9), λ — интересующий нас параметр полезного сигнала, т. е. γ, Ω или a, b.

Точность оценки $\tilde{\lambda}$ характеризуется дисперсией $\sigma_\lambda^2=<(\tilde{\lambda}-\lambda_0)^2>$, где λ_0 — истинное значение параметра в принятой реализации $u(t)$, а усреднение производится по ансамблю всевозможных реализаций шума $n(t)$. Существует несколько методов получения оптимальной оценки параметра сигнала, принятого на фоне шума, которые различаются критериями оптимальности (функций потерь). Будем далее полагать, что априорная плотность вероятности искомого параметра равномерна в некотором интервале значений и что в принятом сигнале $u(t)$ отношение сигнала к шуму много больше единицы. При этих условиях асимптотически эффективная оценка, т. е. оценка с минимальной дисперсией, дается методом максимума функции правдоподобия [1]. Согласно этому методу, оптимальная оценка амплитуды α сигнала известной формы $\alpha s(t)$, принятого на фоне белого шума в интервале времени $(0, \tau)$, дается формулой [2]:

$$\tilde{\alpha}=\int_0^\tau u(t)\, s(t)\, dt \Big/ \int_0^\tau s^2(t)\, dt, \tag{11}$$

а дисперсия оценки равна

$$\sigma_\alpha^2=N_0\left[\int_0^\tau s^2(t)\, dt\right]^{-1}. \tag{12}$$

Применим эти соотношения для оценки точности статического и модуляционного методов. В первом случае в полезном сигнале (5) оцениваемым параметром α является величина $\varphi_0+\gamma$, форма сигнала $s(t)=1$, $0\leqslant t\leqslant\tau$. Для получения оценки необходимо выходной сигнал $u(t)$ сначала пропустить через фильтр нижних частот, чтобы из отклика (5) исключить несущественную в данном случае осциллирующую компоненту, и полученный сглаженный сигнал $u^*(t)$ проинтегрировать согласно (11):

$$\tilde{\alpha}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau u^*(t)\, dt. \tag{13}$$

Дисперсия оценки следует из (12):

$$\sigma_\alpha^2=N_0/\tau.$$

Если значение φ_0 постоянно, т. е. дрейф нулевого положения отсутствует, то

$$\sigma_\gamma^2=\sigma_\alpha^2=N_0/\tau. \tag{14}$$

Из формул (14) и (7) получаем оценку инструментальной точности статического метода:

$$\sigma_1=\omega_0^2\sigma_\gamma=\omega_0^2\sqrt{N_0/\tau}. \tag{15}$$

В модуляционном методе оценке подлежат амплитуды компонент с частотами $2p$. Как видно из формулы (9), в этом случае форма сигнала $s(t)=t\begin{pmatrix}\sin 2pt\\ \cos 2pt\end{pmatrix}$, и согласно (11) оптимальная оценка искомых амплитуд дается процедурой синхронного детектирования:

$$\widetilde{a},\ \widetilde{b}=\int_0^\tau u(t)\begin{pmatrix}\sin 2pt\\ \cos 2pt\end{pmatrix}tdt\Big/\int_0^\tau t^2\begin{pmatrix}\sin^2 2pt\\ \cos^2 2pt\end{pmatrix}dt,$$

откуда

$$\widetilde{a},\ \widetilde{b}=\frac{6}{\tau^3}\int_0^\tau u(t)\begin{pmatrix}\sin 2pt\\ \cos 2pt\end{pmatrix}tdt. \qquad (16)$$

Дисперсия оценок равна

$$\sigma^2_{a,b}=N_0\left[\int_0^\tau t^2\begin{pmatrix}\sin^2 2pt\\ \cos^2 2pt\end{pmatrix}dt\right]^{-1}=\frac{6N_0}{\tau^3}. \qquad (17)$$

В последней формуле осциллирующие члены, возникающие при интегрировании, содержат множители вида $(\omega_0\tau)^{-n}$, $n=1, 2, 3$, и отбрасываются в силу условия $\omega_0\tau\gg 1$. Из (9) и (17) получаем оценку предельной инструментальной точности модуляционного метода:

$$\sigma_3=2\sqrt{6}\,\frac{\omega_0}{\tau}\sqrt{\frac{N_0}{\tau}}. \qquad (18)$$

В динамическом методе оцениваемым параметром является сдвиг частоты собственных колебаний (см. (5)). Оптимальная процедура оценки произвольного неэнергетического параметра сигнала, принятого на фоне белого шума, заключается в подборе такого значения λ, которое максимизирует величину

$$q(\lambda)=\frac{1}{N_0}\int_0^\tau u(t)\,s(t,\lambda)\,dt,$$

где $s(t,\lambda)$ — сигнал, идентичный полезному и варьируемый по параметру λ. В случае оценки частоты такая операция физически осуществляется с помощью системы автоподстройки частоты гетеродина. Дисперсия оценки частоты дается формулой [2]:

$$\sigma^2_\Omega=2N_0\left[\int_0^\tau t^2 s_0^2(t)\,dt\right]^{-1}, \qquad (19)$$

где $s_0(t)=\psi_0\exp(-\delta t)$ — огибающая квазигармонического сигнала (5).

Выполнив интегрирование, нетрудно заметить, что при фиксированной длительности интервала наблюдения τ дисперсия тем меньше, чем больше время релаксации осциллятора $\tau^*=\delta^{-1}$. В предельном случае $\tau^*\gg\tau$ получим

$$\sigma^2_\Omega=\frac{3N_0}{\psi_0^2\tau^3},$$

откуда с учетом (7) находим предельную инструментальную точность динамического метода:

$$\sigma_2=\omega_0\sigma_\Omega=\frac{\omega_0\sqrt{6}}{\psi_0\tau}\sqrt{\frac{N_0}{\tau}}. \qquad (20)$$

Перейдем к рассмотрению ограничений точности, обусловленных броуновскими колебаниями осциллятора. Согласно теореме Найквиста, эти колебания могут быть представлены как реакция осциллятора на действие случайного момента сил $M_{\text{фл}}(t)$ с равномерной спектральной плотностью $4\varkappa TH$, где $\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, H — коэффициент трения. В этом случае уравнения движения осциллятора (3) и (8) переходят в следующие:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \Gamma_1(\varphi_0) + \Gamma_2(\varphi_0)\varphi + m(t) \tag{21}$$

и

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = W_{xy}\cos 2pt + W_\Delta \sin 2pt + m(t), \tag{22}$$

где $m(t)$ — белый шум со спектральной плотностью

$$N_1 = 4\varkappa THJ^{-2}. \tag{23}$$

Решения этих уравнений, т. е. сигнал на выходе регистрирующего прибора, полагаемого далее нешумящим, имеют вид:

$$\varphi(t) = s(t, \lambda) + \xi(t), \tag{24}$$

где $s(t, \lambda)$ — полезный сигнал вида (5) или (9), $\xi(t)$ — броуновские колебания, удовлетворяющие стохастическому уравнению

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = m(t).$$

Из последнего уравнения можно найти функцию корреляции узкополосного случайного процесса $\xi(t)$:

$$K_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp(-\delta|\tau|)(\cos\omega_1\tau + (\delta/\omega_1)\sin\omega_1|\tau|). \tag{25}$$

Задача оценки параметров сигнала, принятого на фоне гауссовского шума с функцией корреляции вида (25), приводит к громоздким вычислениям. В нашем случае удобно воспользоваться процедурой «обеления» шума [3], которая подсказывается видом уравнений (21) и (22). Для этого из выходного сигнала $\varphi(t)$ с помощью дифференцирующих, усиливающих и суммирующего устройств надо сформировать сигнал

$$v(t) = \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi,$$

что возможно, если параметры δ и ω_0 известны априори. Тогда, согласно (21) и (22), имеем

$$v(t) = \Gamma_1 + \Gamma_2\varphi(t) + m(t), \tag{26}$$

или

$$v(t) = W_{xy}\cos 2pt + W_\Delta \sin 2pt + m(t).$$

Таким образом, мы приходим к задаче оценки амплитуды полезных сигналов вида $s_1(t) = 1$; $s_2(t) = \varphi(t)$ и $s_3(t) = \begin{cases}\sin 2pt \\ \cos 2pt\end{cases}$, принятых в сигнале $v(t)$ на фоне белого шума $m(t)$. Применяя формулу (12), получаем следующие выражения для теплового предела точности.

Для статического метода:

$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{N_1}{\tau}} = \sqrt{\frac{8\varkappa T}{J\tau\tau^*}}. \tag{27}$$

Для модуляционного метода:

$$\sigma_6 = \sqrt{\frac{2N_1}{\tau}} = \sqrt{\frac{16\varkappa T}{J\tau\tau^*}}. \tag{28}$$

Наконец, для динамического метода из (12) и (28) имеем:

$$\sigma_5^2 = N_1 \left[\int_0^\tau \varphi^2(t)\, dt \right]^{-1}.$$

Согласно (24) $\varphi(t)$ — случайный процесс; однако мы рассматриваем случай больших отношений сигнал/шум, и можно в последнем выражении приближенно заменить $\varphi(t)$ на регулярный сигнал $\psi_0 \cos(\omega t + \beta_0)$, пренебрегая также и затуханием, так как $\tau \ll \tau^*$. Окончательно получаем для теплового предела точности динамического метода следующее выражение:

$$\sigma_5 = \frac{1}{\psi_0} \sqrt{\frac{2N_1}{\tau}} = \frac{1}{\psi_0} \sqrt{\frac{16\varkappa T}{J\tau\tau^*}}. \tag{29}$$

Полученные соотношения для инструментального и теплового пределов точности различных методов измерения вторых производных гравитационного потенциала сведены в таблицу. Величину $\sqrt{N_0/\tau}$, фигурирующую в формулах (15), (18) и (20), можно интерпретировать как минимальную амплитуду цуга синусоидальных угловых колебаний длительностью τ, регистрируемую прибором на фоне собственных шумов, поэтому она обозначена как $\varphi_{\min}(\tau)$. В той же таблице приведены численные оценки при следующих значениях параметров: $\omega_0 = 2\pi\ \text{с}^{-1}$, $\tau = 10$ с; $\tau^* = 300$ с ($Q = 10^3$); $\psi_0 = 0{,}1$ рад; $T = 300$ К; $J = 10^4$ г·см^2 ($m = 50$ г, $R = 10$ см); $\varphi_{\min}(\tau) = 10^{-11}$ рад.

Метод	Инструментальный предел	Тепловой предел
Статический	$\omega_0^2\, \varphi_{\min}(\tau)$	$\left(\frac{8\varkappa T}{J\tau\tau^*}\right)^{1/2}$
	$0{,}4\cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-2} = 0{,}4$ Е	0,1 Е
Динамический	$\frac{\sqrt{6}\,\omega_0}{\psi_0\ \tau}\ \varphi_{\min}(\tau)$	$\frac{1}{\psi_0}\left(\frac{16\varkappa T}{J\tau\tau^*}\right)^{1/2}$
	0,15 Е	1,5 Е
Модуляционный	$\frac{2\sqrt{6}\,\omega_0}{\tau}\ \varphi_{\min}(\tau)$	$\left(\frac{16\varkappa T}{J\tau\tau^*}\right)^{1/2}$
	0,03 Е	0,15 Е

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. При прочих равных условиях инструментальная точность измерения вторых производных гравитационного потенциала модуляционным методом существенно выше инструментальной точности немодуляционных методов.

2. В рамках сделанных предположений тепловые пределы точности статического и модуляционного градиентометров равны по порядку ве-

личины. Однако на точность статического метода существенное влияние может оказывать дрейф нулевого положения, который имеет спектральную плотность вида $1/f$ и в данном рассмотрении не учитывался. В модуляционном же методе полезный эффект кодируется с удвоенной частотой вращения и может быть сдвинут в ту область частот, где фликкер-шум отсутствует или мал.

3. В немодуляционных методах измеряются не сами величины W_{xy} и W_Δ, а их линейные комбинации вида (4). Поэтому для определения W_{xy} и W_Δ на каждом пункте необходимо делать несколько измерений (минимум три) при различных азимутах прибора φ_0, что увеличивает полное время, затрачиваемое на измерение. Платой за преимущества модуляционного метода является существенное усложнение конструкции градиентометра, и в первую очередь необходимость строго равномерного вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Куликов Е. П., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978, с. 23. [2] Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. [3] Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Сов. радио, 1971, с. 17.

Поступила в редакцию
09.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 6

УДК 551.482.212:551.465

ВОЗДЕЙСТВИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА СТРУКТУРУ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЛОТНОСТНОГО ТЕЧЕНИЯ

Б. И. Самолюбов, А. Ю. Пыркин

(кафедра физики моря и вод суши)

Структура пограничного слоя турбулентного стратифицированного течения является в каждый момент времени отражением происходящих в этом слое сложных процессов обмена потока с окружающей водной средой. Исследования вертикальных распределений параметров стратифицированных течений на их границах, главным образом в зоне пикноклина, в океанах, морях и лабораторных условиях [1, 2] показали существование плотностных ступенчатых микроструктур, пальцев солености и инверсий температуры. Сформулированы предполагаемые причины этих явлений — обрушение внутренних волн, двойная диффузия, интрузия теплых осолоненных вод. Конкретное выяснение происхождения структурных преобразований в контактной зоне стратифицированного потока требует комплексных натурных исследований не только пограничного слоя, но и течения, которому он принадлежит. Такая задача выполнялась при изучении пространственно-временной структуры придонного потока, обусловленного механической и термической стратификацией [3].

Объект исследований — естественный водоем каньонного типа с максимальной глубиной 300 м, длиной около 60 и шириной до 5 км. Регистрировались концентрация взвеси S, температура воды T, средние U и пульсационные значения скорости придонного течения по всей его толщине (до 30 м [4]) и отдельно в области верхней контактной зоны потока дискретным и непрерывным методами.