В заключение необходимо отметить, что для такого инерционного процесса, как режим бета-проводимости, так же как и для случаев КЛ и НТ, стробоскопический режим дает возможность улучшить разрешение в РЭМ. В рассматриваемом случае необходимо учитывать также асимметрию сигнальной области, занимаемую носителями, так как E-поле действует только в одном направлении. Оптимальное решение вопроса требует учета индивидуальных параметров материала и степени обработки поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bröcker W., Pfefferkorn G. IITRes. Inst, SEM / 1976 / I, p. 725. Chicago, IL, 60616; SEM/1977/II, p. 455. Chicago, IL, 60616; SEM/1978/I, p. 333; SEM Inc., AMF O'Hare, IL, 60666. [2] Saparin G. V. 9 th ICEM. Toronto, 1978, p. 420. [3] Lemy H. J., Kimerling L. C., Ferris S. D. SEM/1978/I, p. 717; SEM Inc., AMF O'Hare, IL, 60666. [4] Bresse J. F. IITRes. Inst. Chicago, SEM/1977/I, p. 683. [5] Leedy K. O. Solid State Technol., 1977, **20**, N 2, p. 45. [6] Georges A., Fournier J.-M. et al. Scanning Electron Microscopy, 1980/IV, p. 69. [7] Obyden S. K., Saparin G. V., Spivak G. V. Scanning Electron Microscopy, 1980/ /IV, p. 41. [8] Munakata C. Jap. J. Appl. Phys., 1967, 8, p. 965. [9] Munakata C. Jap. J. Appl. Phys., 1971, **10**, p. 781. [10] Holt D. B., Muir M. D. et al. Quantitative scanning electron microscopy, Academic Press, 1974, Ch. 8. [11] Gopinath A. J. Phys., 1970, **3**, p. 467. [12] Gopinath A., T. de Monts de Savasse. J. Phys. D, 1971, **4**, p. 2031. [13] Spivak G. V., Saparin G. V., Komolova L. F. SEM/1977/I, p. 191. IITRes. Inst. Chicago, IL, 60616. [14] Спивак Г. В., Комолова Л. Ф. и др. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1976, **17**, № 4, с. 442. [15] Spivak G. V., Saparin G. V.SEM/1979/I, p. 267; SEM Inc., AMF O'Hare, IL, 60616. [16] Komolova L. F., Obyden S. K. et al. 9th ICEM—78, **1**, p. 124, Toronto. [17] Комолова Л. Ф. Канд. дис. М. (МГУ), 1977. [18] Спивак Г. В., Комолова Л. Ф. и др. Письма в ЖЭТФ, 1975, **21**, с. 38. [19] Kawado S., Hajafuji Y., Adachi T. Jap. J. Appl. Phys., 1975, **14**, p. 407. [20] Munakata C., Evarhart T. E. Jap. J. Appl. Phys., 1972, **11**, p. 913. [21] Munakata C. Ibid., p. 1333. [22] Munakata C. Ibid., p. 869.

Поступила в редакцию
10.09.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 6

УДК 538.0

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СПИНА

И. М. Тернов, В. А. Бордовицын

(кафедра квантовой теории)

Наиболее строгое рассмотрение спиновых свойств элементарных частиц возможно только в квантовой теории [1—2]. Однако в связи с возрастающим интересом к классической теории спина [3] законно возникает вопрос о связи классических и квантовых уравнений движения спиновой частицы. Надежным инструментом сравнения классической и квантовой теории спина является квазиклассический метод. Впервые спиновые свойства дираковской частицы в квазиклассическом приближении рассматривались в работах [4—6], где было установлено, что дираковской теории спина в квазиклассическом пределе отвечает классическое уравнение Френкеля типа Баргманна—Мишеля—Телегди [7]. В данной работе квазиклассическая теория спина развивается на основе собственновременного уравнения Дирака. Этот подход наилучшим образом соответствует постановке задачи, так как в релятивистски-инвариантных классических уравнениях собственное время является естественным параметром движения.

§ 1. Собственновременное уравнение Дирака (τ-уравнение). Собственное время в теорию Дирака можно ввести по методу Фока [8] следующим образом:

$$\psi = \int\limits_c \Psi d\tau, \ \widehat{H}\psi = 0,$$

$$\widehat{H} = m_0 c - i\gamma_\mu \widehat{P}^\mu - \frac{\mu_a}{2c}\sigma_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta}.$$

Собственновременная волновая функция $\Psi(\tau)$ удовлетворяет τ-уравнению Дирака

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \widehat{H}\Psi \qquad (1)$$

с граничным условием

$$\int\limits_c (\partial\Psi/\partial\tau)\,d\tau = \Psi|_c = 0,$$

где интеграл берется в постоянных пределах или по некоторому контуру в комплексной плоскости (см. [8]).

Оператор $\widehat{H}$ в (1) играет роль «гамильтониана» τ-уравнения. Член $\sim\mu_a$ учитывает аномальное (вакуумное) взаимодействие магнитного момента с внешним полем.

Можно построить также квадрированное τ-уравнение, рассматривавшееся Фоком (при $\mu_a = 0$) [8]. В этом случае

$$\varphi = \int\limits_c \Phi d\tau, \ \widehat{G}\varphi = 0,$$

$$\widehat{G} = \frac{1}{2m_0 c}\left(m_0^2c^2 + \widehat{P}_\mu\widehat{P}^\mu - m_0\mu_Б\sigma_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta} + 2\frac{\mu_a}{c}H_{\mu\nu}\gamma^\mu\widehat{P}^\nu\right),$$

где $\mu_Б = e\hbar/2m_0c$ — магнетон Бора,

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \widehat{G}\varphi, \qquad (2)$$

$$\int\limits_c (\partial\Phi/\partial\tau)\,d\tau = \Phi|_c = 0.$$

Квадрированный «гамильтониан» $\widehat{G}$ имеет прямое применение в гейзенберговской картине движения одночастичных операторов [9].

§ 2. Операторы скорости и спина в квазиклассическом пределе. Представим волновую функцию τ-уравнения Дирака в стандартной квазиклассической форме:

$$\overline{\Psi} = \overline{U}e^{-iS/\hbar}, \quad \Psi = e^{iS/\hbar}U, \qquad (3)$$

где $S(\tau)$ — собственновременная функция действия, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \frac{1}{2m_0c}\left[\left(\partial^\mu S - \frac{e}{c}A^\mu\right)\left(\partial_\mu S + \frac{e}{c}A_\mu\right) + m_0^2c^2\right] = 0.$$

Полагая здесь $\partial^\mu S - (e/c)A^\mu = m_0V^\mu$, где V^μ — четырехмерная скорость, получим условие $\partial S/\partial\tau = 0$, в силу которого τ будет собственным временем, а S — обычной релятивистской функцией действия.

Спинор U, как всегда, представим в виде разложения

$$U = u_0 + \hbar u_1 + \hbar^2 u_2 + \ldots .$$

Тогда в нулевом приближении по $\hbar$ «на решениях» τ-уравнения можно получить следующие равенства:

$$\begin{gathered}
\bar{u}_0 (c + i\gamma_\mu V^\mu) u_0 = 0, \quad \bar{u}_0 (c - i\gamma_\mu V^\mu) u_0 = 0, \\
\bar{u}_0 (c + i\gamma_\mu V^\mu) \gamma^\rho u_0 = 0, \quad \bar{u}_0 \gamma^\rho (c - i\gamma_\mu V^\mu) u_0 = 0, \\
\bar{u}_0 (c + i\gamma_\mu V^\mu) \sigma^{\alpha\beta} u_0 = 0, \quad \bar{u}_0 \sigma^{\alpha\beta} (c - i\gamma_\mu V^\mu) u_0 = 0, \\
\bar{u}_0 (c + i\gamma_\mu V^\mu) \gamma^\rho\gamma^5 u_0 = 0, \quad \bar{u}_0 \gamma^\rho\gamma^5 (c - i\gamma_\mu V^\mu) u_0 = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Если ввести нормированные спиноры

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_0}{\sqrt{\bar{u}_0 u_0}}, \quad u = \frac{u_0}{\sqrt{\bar{u}_0 u_0}}, \tag{5}$$

то из (4) после некоторых преобразований получим соотношения

$$\begin{gathered}
\bar{u}\,(-ic\gamma^\mu)\, u = V^\mu, \quad \bar{u}\gamma^5 u = 0, \\
\bar{u}\sigma^{\mu\nu} u = \frac{1}{c}\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \bar{u}\gamma_\alpha\gamma^5 u V_\beta, \\
\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u = \frac{1}{c}\, \bar{u}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 u\, V_\nu,
\end{gathered} \tag{6}$$

кроме того,

$$\begin{gathered}
V_\mu \bar{u}\sigma^{\mu\nu} u = 0, \\
V_\mu \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

и

$$V_\mu \bar{u}\,(-ic\gamma^\mu)\, u = -c^2. \tag{8}$$

Отсюда следует, что в квазиклассическом пределе для плотности одночастичных операторов скорости

$$\hat{V}^\mu = -ic\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} \frac{\hat{p}^\mu}{m_0}$$

и спина

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \hat{p}^\nu - \gamma^\nu \hat{p}^\mu}{m_0 c},$$

$$\hat{S}^\alpha = \left(\gamma^\mu + i\,\frac{\hat{p}^\mu}{m_0 c}\right)\gamma^5$$

справедливы такие определения:

$$\begin{gathered}
\bar{\Psi}\, \hat{V}^\mu \Psi = \bar{u}\,(-ic\gamma^\mu)\, u = \overline{V^\mu}, \\
\bar{\Psi}\, \hat{\Pi}^{\mu\nu} \Psi = \bar{u}\sigma^{\mu\nu} u = \overline{\Pi^{\mu\nu}}, \\
\bar{\Psi}\, \hat{S}^\mu \Psi = \bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u = \overline{S^\mu}.
\end{gathered}$$

Принимая во внимание (6), получаем соотношения, идентичные тем, которые имеют место в классической теории спина [3], а именно

$$\overline{S^\alpha} = \frac{1}{2c}\, \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \overline{\Pi_{\mu\nu}} V_\beta, \quad \overline{\Pi^{\mu\nu}} = \frac{1}{c}\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \overline{S_\alpha} V_\beta.$$

Выражения (7) принимают вид

$$V_\mu \overline{\Pi^{\mu\nu}} = 0, \quad V_\mu \overline{S^\mu} = 0.$$

Это известное условие Френкеля и Тамма (см. [3]).

Равенство (8) отражает постулат постоянства скорости света:

$$V_\mu \overline{V^\mu} = -c^2.$$

Таким образом, мы нашли выражение основных соотношений квантовой теории спина в квазиклассическом пределе $\hbar \to 0$. Как и ожидалось, они совпали с соответствующими соотношениями классической теории спина.

§ 3. Вывод спиновых уравнений движения квазиклассическим методом. Рассмотрим квазиклассические свойства τ-уравнения Дирака. Подставив в (1) квазиклассическую волновую функцию (3) и приравняв нулю члены с одинаковыми степенями $\hbar$, получим ряд последовательных соотношений для определения спиноров u_0, u_1, ...:

$$(c - i\gamma_\mu V^\mu) u_0 = 0,$$

$$(c - i\gamma_\mu V^\mu) u_1 = \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma_\mu \partial^\mu + \frac{1}{2} \frac{\mu_a}{\hbar c} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right) u_0,$$

$$(c - i\gamma_\mu V^\mu) u_2 = \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma_\mu \partial^\mu + \frac{1}{2} \frac{\mu_a}{\hbar c} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right) u_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из первого равенства следует, что

$$u_0 = \frac{i}{c} \gamma_\mu V^\mu u_0. \tag{9}$$

Далее заметим, что при умножении слева на $c + i\gamma_\mu V^\mu$ левые части всех этих равенств тождественно обратятся в нуль, причем второе из них можно преобразовать к виду

$$\frac{du_0}{d\tau} + \frac{1}{2} (\partial_\mu V^\mu) u_0 = \left(i \frac{\mu}{2\hbar} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} - i \frac{\mu_a}{\hbar c} H^{\mu\nu} \gamma_\mu V_\nu \right) u_0, \tag{10}$$

где $\mu = \mu_Б + \mu_a = (g/2)\mu_Б$.

Здесь использовано представление производной (см. также [10])

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} V_\mu \partial_\nu,$$

равенство (9) и тождество

$$\sigma^{\mu\nu} (\partial_\mu V_\nu) = \frac{\mu_Б}{\hbar} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}.$$

Если вместо u_0 ввести нормированный спинор u согласно (5), то выражение (10) примет вид

$$\frac{du}{d\tau} = i \frac{\mu}{2\hbar} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} u - i \frac{\mu_a}{\hbar c} H^{\mu\nu} \gamma_\mu V_\nu u. \tag{11}$$

Аналогично из дираковски-сопряженного τ-уравнения можно найти

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = -i \frac{\mu}{2\hbar} \bar{u} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} - i \frac{\mu_a}{\hbar c} \bar{u} H^{\mu\nu} \gamma_\mu V_\nu. \tag{12}$$

Знание производных (11)—(12) можно использовать для отыскания уравнений движения заряда и спина в первом нетривиальном квазиклассическом приближении.

Вначале заметим, что согласно (11)—(12) $d(\bar{u}u)/d\tau = 0$ и, следовательно, плотность квазиклассического волнового пакета является постоянной величиной. Мы уже использовали это свойство, положив $\bar{u}u = 1$.

Далее можно показать, что уравнение движения заряда, которое при $\hbar \to 0$ определяется билинейной формой $\overline{V^\mu}$, имеет обычный «лоренцевский» вид

$$m_0 \frac{d\overline{V^\mu}}{d\tau} = \frac{e}{c} H^{\mu\nu} \overline{V}_\nu. \tag{13}$$

Этот результат соответствует известному утверждению о том, что в нулевом приближении по $\hbar$ «волновые пакеты будут вести себя так же, как частицы, движущиеся по классическим траекториям» [11].

Спиновые уравнения для $\overline{S^\mu}$ и $\overline{\Pi^{\mu\nu}}$ совпадают с уравнениями Френкеля типа Баргманна—Мишеля—Телегди (см. [2])

$$\frac{d\overline{S^\mu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0 c} H^{\mu\nu} \overline{S}_\nu + \frac{e(g-2)}{2m_0 c^3} V^\mu V_\alpha H^{\alpha\beta} \overline{S}_\beta, \tag{14}$$

$$\frac{d\overline{\Pi^{\mu\nu}}}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0 c} (H^{\mu\rho} \overline{\Pi_\rho^\nu} - H^{\nu\rho} \overline{\Pi_\rho^\mu}) + \frac{e(g-2)}{2m_0 c^3} (V^\mu \overline{\Pi^{\nu\alpha}} - V^\nu \overline{\Pi^{\mu\alpha}}) H_{\alpha\beta} V^\beta. \tag{15}$$

При выводе было использовано соотношение

$$\overline{u} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^5 u = \frac{1}{c} (V^\alpha \overline{S^\beta} - V^\beta \overline{S^\alpha})$$

и тождество

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \overline{S}_\rho H_{\alpha\beta} V^\beta = \frac{1}{c} (V^\mu \overline{\Pi^{\alpha\nu}} - V^\nu \overline{\Pi^{\alpha\mu}}) H_{\alpha\beta} V^\beta.$$

Уравнения (14)—(15) можно получить и на основе квазиклассического приближения τ-уравнения Фока (2). В этом случае

$$\overline{\Phi} = \overline{F} e^{-iS/\hbar}, \quad \Phi = e^{iS/\hbar} F,$$

$$F = f_0 + \hbar f_1 + \hbar^2 f_2 + \ldots .$$

После подстановки в (2) при $\hbar \to 0$ получаем

$$\frac{df_0}{d\tau} + \frac{1}{2} (\partial^\mu V_\mu) f_0 = \left(i \frac{\mu}{2\hbar} \sigma_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} - i \frac{\mu_a}{\hbar c} H^{\mu\nu} \gamma_\mu V_\nu \right) f_0.$$

Легко видеть, что это уравнение аналогично (10). Последующие действия повторяют то, что было проделано выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. [2] Бордовицын В. А., Тернов И. М. Теор. и матем. физ., 1982, **51**, № 3, с. 327. [3] Тернов И. М., Бордовицын В. А. УФН, 1980, **132**, с. 345. [4] Rubinov S. I., Keller J. B. Phys. Rev., 1963, **131**, p. 2789. [5] Rafanelli K., Schiller R. Ibid., 1964, **B135**, p. 279. [6] Kolsrud M. Nuovo Cim., 1965, **39**, p. 504. [7] Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L. Phys. Rev. Lett., 1959, **2**, p. 435. [8] Фок В. А. Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957, с. 141. [9] Тернов И. М., Бордовицын В. А. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1980, **21**, № 3, с. 8. [10] Bazeia D. Lett. Nuovo Cim., 1980, **29**, p. 228. [11] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.

Поступила в редакцию
23.10.81