СВЧ-методы исследования плазмы. М.: Наука, 1968, с. 176. [5] Persson K.-B. Phys. Fluids, 1962, 5, N 12, p. 1625. [6] Winkler R., Wilhelm J. Beitrage Plasmaphysik, 1981, 21, N 3, p. 163.

Поступила в редакцию
18.01.82

УДК 534.2

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В. А. Буров, А. А. Горюнов, А. В. Сасковец

(кафедра акустики)

Одним из достаточно эффективных методов решения обратных задач рассеяния томографического типа, учитывающих процесс перерассеяния, является итерационный способ решения.

Будем исходить, следуя, например [1, 2], из следующего уравнения рассеяния волны на дискретном рассеивателе

$$Q\,(E-\varepsilon R)^{-1}\,\varepsilon\,P\,\mathbf{f}_0=\mathbf{u}, \qquad (1)$$

где Q, P, R — операторы распространения поля с ядром $e^{ik|\mathbf{R}|}/|\mathbf{R}|$ из области рассеяния $\mathcal{R}$ в область приема Y, из области излучения X в область $\mathcal{R}$ и внутри области $\mathcal{R}$ соответственно; ε — оператор, описывающий рассеиватель и представляющий собой диагональную матрицу; E — единичный оператор; $f_{0i}=\operatorname{div}\mathbf{f}$ ($\mathbf{f}$ — вектор объемной силы излучателей); $\mathbf{u}$ — рассеянное поле.

Рассмотрим следующий итерационный алгоритм решения уравнения (1), ограничиваясь конечномерным описанием рассеивателя и вектора наблюдаемого поля

$$Q\,(E-\varepsilon^j R)^{-1}\,\varepsilon^{j+1}\,P\,\mathbf{f}_0=\mathbf{u}, \qquad (2)$$

где j — номер итерации. Покажем, что алгоритм (2) является сходящимся, при этом, не ограничивая общности рассуждений, будем считать матрицу Q квадратной, т. е. будем полагать, что число дискретных рассеивателей, описывающих данную рассеивающую область, равно числу точек приема. В этом случае матрица Q имеет обратную и эволюционное уравнение, соответствующее (2), может быть записано в виде

$$(E-\varepsilon^j R)\,\mathbf{T}=[P f_0]\left(\varepsilon^j+\frac{d\varepsilon^j}{dt}\right), \qquad (3)$$

где $\mathbf{T}=Q^{-1}\mathbf{u}$, $[Pf_0]$ — вектор $P\mathbf{f}_0$, преобразованный в диагональную матрицу ($[Pf_0]=\operatorname{diag}Pf_0$), а приращение Δt считается единичным. От (3) легко перейти к системе дифференциальных уравнений для ε, имеющей вид

$$[Pf_0]\,\frac{d\varepsilon}{dt}+([Pf_0]+[RT])\,\varepsilon=\mathbf{T}, \qquad (4)$$

где $[RT]$ — вектор $R\mathbf{T}$, преобразованный в диагональную матрицу. Соотношение (4) представляет собой совокупность дифференциальных уравнений, интегируемых независимо друг от друга в силу диагональности матриц $[P\mathrm{f}_0]$ и $[RT]$. Действительно, для i-й компоненты вектора ε получим

$$U_i^0 \frac{d\varepsilon_i}{dt} + \left(U_i^0 + \sum_j R_{ij} T_j \right) \varepsilon_i = T_i, \tag{5}$$

где $U^{i0} = \sum_i R_{ij} f_{0j}$.

Уравнение (5) интегрируется, и мы приходим к результату

$$\varepsilon_i(t) = \frac{T_i}{U_i^0 + \sum_j R_{ij} T_j} + \left(\varepsilon_i(0) - \frac{T_i}{U_i^0 + \sum_j R_{ij} T_j} \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\left(1 + \frac{\sum_j R_{ij} T_j}{U_i^0} \right) t \right\},$$

где $\varepsilon_i(0) = \varepsilon_i(t)|_{t=0}$.

Здесь и далее в выражениях, содержащих дробь, подразумевается почленное деление.

Таким образом, алгоритм (2) сходится в отсутствие сильной фокусировки, т. е. когда рассеянное поле в каждой точке внутри рассеивателя меньше прямого поля в этой точке:

$$\frac{\left| \left(\sum_j R_{ij} T_j \right) (U_i^0)^* \right|}{| U_i^0 |^2} < 1, \tag{6}$$

причем сходимость экспоненциальная и

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon_i(t) = \frac{T_i}{U_i^0 + \sum_j R_{ij} T_j}.$$

Проверка предложенного итерационного алгоритма с помощью ЭВМ подтвердила сделанные теоретические выводы и показала его высокую эффективность в области, где выполняется условие (6). Если же условие (6) не выполняется, то наблюдается, как это и предполагалось, экспоненциальная расходимость алгоритма.

Все предыдущее рассмотрение относилось к случаю квадратных обратимых матриц Q. Более интересен, однако, случай, когда данные о рассеянии получены при сравнительно небольшом (меньшем, чем число рассеивателей) числе приемников, но на нескольких рабочих частотах и при нескольких вариантах положения излучателя (f_0). Уравнение (1) переходит в этом случае в выражение

$$\sum_k Q^k (E - \varepsilon R^k)^{-1} \varepsilon P^k \mathrm{f}_0^k = \mathbf{u}, \tag{7}$$

где индекс k нумерует частоту и конфигурацию излучателя, а каждое из Q^k является необратимой матрицей. Разрешить нелинейное относительно ε матричное уравнение (7) иначе, чем итерационным способом, не представляется возможным. В этом случае алгоритм, аналогичный (2), остается справедливым и радиус его сходимости должен быть по крайней мере не меньшим, чем для квадратных Q. Более того, можно ожидать расширения области сходимости, так как в этом случае для решения задачи необходимо применение нескольких независимых измерений рассеянного поля, что в результате фокусировки и временного разрешения ведет к уменьшению роли многократного перерассеяния падающей на рассеиватель волны и, как следствие этого, к большей устойчивости алгоритма (2). Это подтверждает модельный эксперимент для случая, когда число рассеивателей больше числа приемников, а недостающая информация восполняется увеличением числа рабочих частот в сочетании с несколькими вариантами первичного поля $P\mathfrak{f}_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Буров В. А., Горюнов А. А. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1977, 18, № 6, с. 95. [2] Prosser R. T. J. Math. Phys., 1969, 10, N 10, p. 1819.

Поступила в редакцию
05.02.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1982, т. 23, № 6

УДК 534.2

ОЦЕНКА РАССЕИВАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ТИПА

В. А. Буров, А. А. Горюнов, А. В. Сасковец

(кафедра акустики)

Значительный интерес, который вызывает в последнее время решение задач томографического типа, основан прежде всего на их большом практическом значении. Однако решение такой задачи, учитывающее многократное перерассеяние падающей на рассеивающий объект волны, в достаточно общей и практически интересной ситуации часто сталкивается с непреодолимыми трудностями. Решение же ее в борновском приближении может быть доведено до конца, поэтому представляется интересным приближенное сведение строгой задачи к решению нескольких задач в борновском приближении с последующим усреднением полученных результатов. Во многих работах эта процедура, по сути дела, широко используется [1, 2], не находя, однако, достаточного обоснования. В работе [3] нами был теоретически рассмотрен вопрос полезности такого усреднения и проведена оценка возникающей при этом ошибки.

Для дискретного случая относительная ошибка в определении коэффициентов переизлучения дискретных рассеивателей, как показано в [3], составляет

$$|\Delta_{\text{отн}}| \cong \frac{\langle|\varepsilon^{\text{Б}}|\rangle \sqrt{M}}{\sqrt{lm}}, \tag{1}$$

где $<|\varepsilon^{\text{Б}}|>$ — среднее значение борновских коэффициентов переизлучения, M — число рассеивающих точек, описывающих данный рассеиватель, l — число различных частот, на которых проводились измерения, а m — число положений точечного излучателя.

Таким образом, в (1) lm — общее число решений борновской задачи. При получении этой оценки предполагалось, что все M точечных рассеивателей, составляющих рассеиватель в целом, имеют приблизительно одинаковую силу и равномерно расположены в рассеивающей области; кроме того, предполагалось, что рассеивающая область облучается равномерно.