которого определяется углом обзора приемника. Антенные свойства МИП описываются формулой (2), дающей при $\lambda=\lambda_0$ форму центрального лепестка диаграммы направленности.

Для $\lambda=\lambda_0$ угловая полуширина $\delta\theta$ центрального лепестка на уровне $A_{max}/2$ определяется по формуле

$$\delta\theta=\sqrt{\frac{1+k+x}{2C}}.$$

Параметры МИП выбираются из требования максимальности A при $\lambda=\lambda_0$ и $\theta_0=0$. При этом оказывается, что $x\sim 1$, $k\ll 1$ [3]. Поэтому $\delta\theta\cong\sqrt{1/C}$. Как следует из выражений для C, величина C пропорциональна $1/T_1$. В свою очередь, $T_1\sim(n_L/n_H)^{2N}$, где $2N$ — число слоев переднего зеркала. Поэтому $\delta\theta\sim(n_L/n_H)^N$. Отсюда видно, что угловая ширина центрального лепестка быстро уменьшается с увеличением числа слоев переднего зеркала или отношения n_H/n_L.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Баскаков А. Н., Козарь А. В. и др. Письма в ЖТФ, 1976, 2, № 19, с. 891. [2] Пирогов Ю. А., Тихонравов А. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, 19, № 6, с. 42. [3] Пирогов Ю. А., Тихонравов А. В. Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1978, 21, № 3, с. 19. [4] Антонов В. В., Войцеховский А. В. и др. Радиотехн. и электроника, 1978, 23, № 10, с. 2189. [5] Баскаков А. Н. Автореф. канд. дис. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. [6] Клементьева А. Ю., Тихонравов А. В. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1978, 19, № 3, с. 75.

Поступила в редакцию
27.03.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, т. 24, № 1

УДК 62—50+534

ИССЛЕДОВАНИЕ ТИПОВ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ ЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Г. А. Бендриков, В. И. Мифтахов

(кафедра физики колебаний)

Как известно, качество переходного процесса системы зависит от расположения нулей и полюсов передаточной функции относительно полюсов комплексного спектра внешнего воздействия. Поэтому важной задачей является исследование законов движения полюсов системы (корней характеристического уравнения) при изменении параметров системы.

В отличие от [1, 2] в настоящей работе проведено полное исследование всех типов траекторий корней (ТК) линейных и линеаризованных систем, описываемых характеристическим уравнением

$$(a_0p^4+a_1p^3+a_2p^2+a_3p+a_4)+K=0. \tag{1}$$

Здесь K — свободный параметр, изменяющийся в широких пределах ($0\leqslant K<+\infty$ или $-\infty<K\leqslant 0$), a_i ($i=0, 1, \ldots, 4$) — параметры семейства ТК, принимающие самые разнообразные значения. К такому виду могут приводиться уравнения свободных движений систем различной физической природы с обратной связью или без нее, пассивных или активных.

В зависимости от численных значений a_i, однозначно задающих на плоскости комплексных частот $p=\delta+j\omega$ расположение четырех начальных точек, ТК уравнения (1), могут иметь девять типов. Эти типы ТК отличаются числом и взаимным расположением кратных точек, а также симметрией или асимметрией относительно вертикальной прямой, проведенной через центр асимптот [3].

Анализируя различные типы ТК уравнения (1), можно установить характер потери устойчивости при отрицательной и положительной обратной связи, способы достижения максимальной степени устойчивости, проследить за изменением реакции системы на типовые воздействия при варьировании свободного параметра и т. д. В случае отсутствия нулей системы полный корневой годограф [4] содержит все данные для построения переходной характеристики на единичное ступенчатое воздействие, а для систем, допускающих гармоническую линеаризацию, позволяет определить амплитуду и устойчивость периодических движений в системе [5].

Производя в уравнении (1) замену $p=p_1-a_1/(4a_0)$, означающую перенос мнимой оси $j\omega$ в центр асимптот $a^*=-a_1/(4a_0)$, получим

$$(p_1^4+Np_1^2+Mp_1)+K_1=0, \tag{2}$$

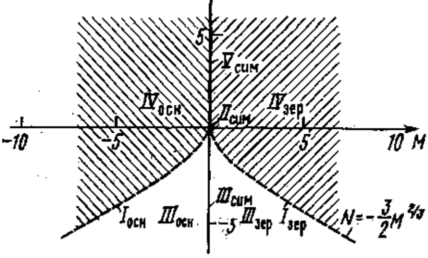
где

$$N=\frac{a_2}{a_0}-\frac{3}{8}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2,\ M=\frac{a_3}{a_0}-\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{1}{8}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 \tag{3}$$

два новых параметра семейства ТК, выражающиеся через коэффициенты a_i уравнения (1),

$$K_1=\frac{K}{a_0}+\frac{a_4}{a_0}-\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_3}{a_0}+\frac{1}{16}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\frac{a_2}{a_0}-\frac{3}{256}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^4$$

параметр ТК, являющийся линейной функцией K. При таком выборе K_1 начальные точки уравнения (2) получаются переносом начальных точек уравнения (1) вдоль ТК, причем одна из начальных точек уравнения (2) всегда равна нулю. Согласно [3], такие преобразования на плоскости комплексных частот не меняют типа ТК.



Выделим на действительной плоскости (M, N) области и границы между ними, соответствующие различным типам ТК уравнения (2). При $M=0$, $-\infty<N<+\infty$ начальные точки, а следовательно, и корневые годографы уравнения (2) симметричны относительно мнимой оси комплексной плоскости p_1. При $M\neq 0$ для любых двух пар значений $(M;\ N)$ и $(-M;\ N)$ начальные точки и корневые годографы уравнения (2) получаются зеркальным отражением относительно мнимой оси комплексной плоскости p_1. Типы ТК для значений параметров M и N, лежащих в левой полуплоскости (M, N), назовем основными, в правой полуплоскости — зеркальными и на оси ординат — симметричными. Будем обозначать их римскими цифрами с индексами в соответствии с рисунком.

Кратные точки ТК уравнения (2), числом и взаимным расположением которых отличаются различные типы ТК, найдем из уравнения возможных кратных точек [3]

$$p_1^3+\frac{N}{2}p_1+\frac{M}{4}=0. \tag{4}$$

Действительные корни уравнения (4) всегда являются кратными точками ТК, а комплексно-сопряженные требуют проверки удовлетворения уравнению (2).

Из анализа дискриминанта уравнения (4) $D=-4(N/2)^3-27(M/4)^2$ нетрудно установить следующее.

1) При $D=0$, т. е.

$$N=-\frac{3}{2}M^{2/3}, \tag{5}$$

все три корня уравнения (4) действительные, причем два из них равны между собой. На рисунке кривая (5) изображена прерывистой линией. Она соответствует типам ТК с одной двукратной и одной трехкратной точками (см. $\mathrm{I_{осн}}$ и $\mathrm{I_{зер}}$ типы ТК таблицы). В частном случае $M=N=0$ все три корня уравнения (4) равны нулю, а ТК уравнения (2) имеют четырехкратную начальную точку (см. $\mathrm{II_{сим}}$ тип ТК таблицы).

2) При $D>0$ $\left(N<-\frac{3}{2}M^{2/3}\right)$ уравнение (4) имеет три различных действительных корня, а ТК уравнения (2) — три двукратные точки ($\mathrm{III_{осн}}$, $\mathrm{III_{сим}}$ и $\mathrm{III_{зер}}$ типы ТК таблицы).

3) При $D<0$ $\left(N>-\frac{3}{2}M^{2/3}\right)$ только один корень уравнения (4) действительный, поэтому ТК уравнения (2) имеют одну двукратную точку ($\mathrm{IV_{осн}}$ и $\mathrm{IV_{зер}}$ типы ТК таблицы).

Комплексно-сопряженные точки ТК могут быть только двукратными (порядок характеристического уравнения равен четырем). Их можно найти, записав уравнение (2) в виде

$$(p_1^4+Np_1^2+Mp_1)+K_1=(p_1-\alpha-j\beta)^2(p_1-\alpha+j\beta)^2=0.$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p_1, получим условия

$$M=0,\ 0<N<+\infty, \tag{6}$$

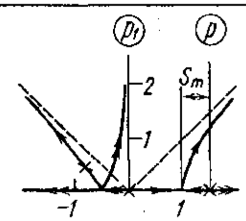
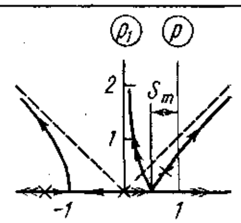
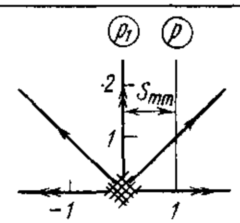
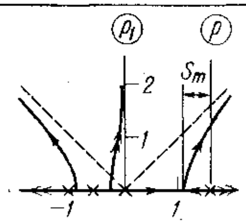
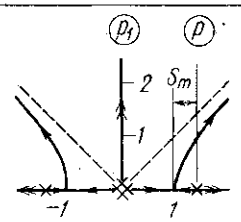
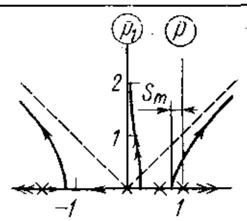
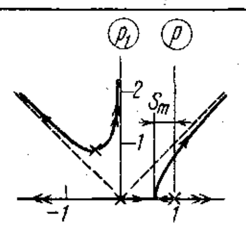
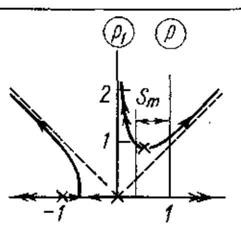
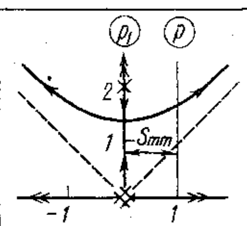
при которых ТК уравнения (2) имеют двукратные комплексно-сопряженные точки $\alpha\pm j\beta$. На плоскости (M, N) этому соответствует положительная ось ординат, изображенная на рисунке жирной линией. При выполнении (6) с учетом $D<0$ ТК уравнения (2) имеют двукратную действительную и двукратные комплексно-сопряженные точки ($\mathrm{V_{сим}}$ тип ТК таблицы).

Таким образом, все многообразие корневых годографов уравнения (2), а следовательно, и уравнения (1) может быть сведено к девяти типам ТК. Пусть при обратном переходе к уравнению (1) мнимая ось $j\omega$ занимает положение, обозначенное на корневых годографах таблицы через p в кружочке. Чтобы не усложнять рисунки в таблице, положение начальных точек оставим без изменения. Будем рассматривать как положительные, так и отрицательные корневые годографы. Из анализа различных типов ТК можно сделать ряд выводов.

С увеличением $|K|$ устойчивые в разомкнутом состоянии системы класса [4; 0] (в этом обозначении 4 — число начальных, а 0 — число предельных точек ТК) становятся неустойчивыми. При отрицательной обратной связи ($K\geqslant 0$) неустойчивость обусловлена выходом пары комплексно-сопряженных корней в правую полуплоскость p, что приводит к колебательному самовозбуждению системы. Критическая частота определяется из уравнения ТК при $\delta=0$ [3]

$$\omega_k{}^2=a_3/a_1, \tag{7}$$

Типы траекторий корней систем класса [4; 0]

Тип ТК	$I_{осн}$	$I_{зер}$	$II_{сим}$
Область значений параметров	$N=-1{,}5\sqrt[3]{M^2}$, $-\infty<M<0$	$N=-1{,}5\sqrt[3]{M^2}$, $0<M<+\infty$	$N=0$, $M=0$
Численный пример	 $M=-1$; $N=-1{,}5$	 $M=1$; $N=-1{,}5$	 $M=N=0$
Тип ТК	$III_{осн}$	$III_{сим}$	$III_{зер}$
Область значений параметров	$N<-1{,}5\sqrt[3]{M^2}$, $-\infty<M<0$	$-\infty<N<0$, $M=0$	$N<-1{,}5\sqrt[3]{M^2}$, $0<M<+\infty$
Численный пример	 $M=-1$; $N=-2$	 $M=0$; $N=-2$	 $M=1$; $N=-2$
Тип ТК	$IV_{осн}$	$IV_{зер}$	$V_{сим}$
Область значений параметров	$N>-1{,}5\sqrt[3]{M^2}$, $-\infty<M<0$	$N>-1{,}5\sqrt[3]{M^2}$, $0<M<+\infty$	$0<N<+\infty$, $M=0$
Численный пример	 $M=-1$; $N=0$	 $M=1$; $N=0$	 $M=0$; $N=4$

а соответствующее ей критическое значение свободного параметра по формуле

$$-K_k = a_0\omega_k^4 - a_2\omega_k^2 + a_4 = a_0\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 - a_2\left(\frac{a_3}{a_1}\right) + a_4. \qquad (8)$$

При положительной обратной связи ($K \leqslant 0$) с ростом $|K|$ один из действительных корней переходит в правую полуплоскость p, и система становится апериодически неустойчивой. В этом случае $\omega_k=0$ и формула (8) принимает вид

$$-K_a = a_4.$$

Для устойчивых систем важной характеристикой является степень устойчивости S, равная по абсолютной величине действительной части ближайшего к мнимой оси корня (или корней) уравнения (1). Проследив за изменением S при изменении свободного параметра K для каждого из типов ТК, данных в таблице, можно найти максимальную степень устойчивости. Она может достигаться:

1) в кратных точках, ближайших к мнимой оси $j\omega$ (для большинства типов ТК);

2) при расположении одного действительного и пары комплексно-сопряженных корней, движущихся в противоположных направлениях, на одной вертикальной прямой ($\mathrm{IV}_{\text{зер}}$ тип ТК таблицы);

3) при расположении всех четырех корней на вертикальной прямой, проведенной через центр асимптот ($\mathrm{V}_{\text{сим}}$ тип ТК таблицы).

В первых двух случаях величина S_m достигается при единственном значении $K=K_m$, определяемом из полного корневого годографа, в последнем случае — в целой области значений K. Для систем, замкнутых обратной связью, максимальная степень устойчивости может получиться не только при отрицательной, но и при положительной обратной связи (см., например, $\mathrm{I}_{\text{зер}}$ тип ТК). Для $\mathrm{II}_{\text{сим}}$ и $\mathrm{V}_{\text{сим}}$ типов ТК она равна максимальной степени устойчивости систем класса [4; 0] $S_{mm} = |a^*| = a_1/(4a_0)$, для остальных типов ТК — меньше этой величины. Сдвигая центр асимптот a^* влево, т. е. перемещая начальные точки влево относительно мнимой оси $j\omega$, можно увеличить максимальную степень устойчивости системы.

В случае заданных значений a_i плоскость параметров (M, N) может быть использована для качественного построения корневого годографа (по начальным точкам, асимптотике и знанию типа ТК). Для семейства корневых годографов уравнения (1) на плоскости (M, N) можно построить кривые в функции параметра семейства ТК и проследить по ним за изменением типа ТК от этого параметра. Все это позволяет облегчить анализ и синтез систем класса [4; 0].

Пример. Определим тип ТК следящей системы автопилота [6], описываемой характеристическим уравнением

$$p(p+1{,}57)(p^2+10{,}7p+58{,}9)+K=0. \qquad (9)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим $a_0=1$; $a_1=12{,}270$; $a_2=75{,}699$; $a_3=92{,}473$; $a_4=0$, откуда по формулам (3) вычисляем $N=19{,}24$; $M=-141{,}03$. С помощью рисунка и соотношений таблицы находим, что ТК уравнения (9) имеют $\mathrm{IV}_{\text{осн}}$ тип. Согласно (7) и (8) $\omega_k=2{,}7$ и $K_k=513{,}7$. При отрицательной обратной связи система устойчива в области $0<K<513{,}7$. Как видно из примера $\mathrm{IV}_{\text{осн}}$ типа ТК таблицы, доминирующие корни уравнения (9) при малых значениях K

действительные, при больших — комплексно-сопряженные. Этих данных достаточно, чтобы судить о свойствах системы в области устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Yeh V. C. M. Trans. of ASME, ser. D, 1954, 76, N 3, p. 349. [2] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Автоматика и телемеханика, 1955, 16, № 3, с. 288. [3] Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. [4] Бендриков Г. А., Фонсека Араухо У. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1973, 14, № 1, с. 60. [5] Кузнецов Ю. И. Автореф. канд. дис. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. [6] Блейклок Дж. Г. Автоматическое управление самолетами и ракетами. М.: Машиностроение, 1969.

Поступила в редакцию
08.06.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, т. 24, № 1

УДК 551.466.31

СПЕКТРЫ ЗАРОЖДАЮЩИХСЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

Г. Е. Кононкова, К. В. Показеев

(кафедра физики моря и вод суши)

Форма спектра развитых ветровых волн достаточно хорошо изучена; существует ряд эмпирических и теоретических моделей спектров ветрового волнения для больших разгонов или для большой продолжительности действия ветра [1]. Зарождение ветрового волнения и формы его спектра исследовались мало. (Зарождающимися мы называем работки дистанционных методов изучения океана, так как именно волны, имеющие разгон не более нескольких метров). Данные о структуре высокочастотного поверхностного волнения также важны для разкоротковолновое поверхностное волнение определяет радиолокационную или оптическую яркость морской поверхности.

С целью изучения спектров зарождающегося ветрового волнения (ЗВВ) нами был проведен эксперимент в аэрогидроканале в условиях глубокой воды. Измерение возвышений поверхности проводилось струнными волнографами, датчики которых размещались вдоль оси канала на разгонах, равных 46, 98, 170, 235, 250, 300 и 370 см. Средняя скорость ветра в канале измерялась трубкой Пито. Профиль средней скорости ветра удовлетворял логарифмической зависимости. Изменение динамической скорости V_* вдоль канала при малых разгонах было незначительным. Эксперимент был проведен при V_*, равных 35, 46, 65, 83 и 90 см/с. Более подробно методика экспериментов описана в работе [2].

Для различных разгонов X и динамических скоростей V_* были получены записи возвышений поверхности η (X, V_*, t), по которым были рассчитаны спектры возвышений поверхности $S(\omega)$. Поскольку исследовалось только стационарное волнение, анализировались зависимости спектров от X и V_*. На рис. 1 приведены спектры ветрового волнения при $V_*=\text{const}$ и переменной величине X, а на рис. 2 — спектры $S(\omega)$ при $X=\text{const}$ и переменной V_*. Изменение спектра при росте X $(V_*=\text{const})$ происходит обычным образом: растет величина максимума спектра, максимум смещается в сторону более низких частот. В области высоких частот существует участок равновесия. Спектры волн при $X=\text{const}$ и переменной V_* уже не имеют интервала равновесия: про-