На более низком уровне (500 мбар) 27-суточная периодичность исчезает в III секторе и значительно ослабевает в I секторе. 25-суточные колебания сохраняются в обоих секторах, причем фаза их в I и III секторах становится одинаковой. В меридиональной циркуляции периодичность в 27 сут не обнаружена, а 25-суточные колебания индекса $I_м$ имеются только в III секторе.

В работе сделана попытка объяснить часть полученных результатов исходя из гипотезы солнечного воздействия на атмосферную циркуляцию. Предложено учесть наложение колебаний для объяснения ряда наблюдавшихся периодичностей. Отметим, что, используя наложение колебаний и определив совокупность факторов, влияющих на циркуляцию, можно определить все периоды ее изменения. Обратное также верно, т. е. для окончательного заключения о природе причин, определяющих циркуляцию атмосферы, необходимо более точное определение значений ее характерных периодов. Для этого необходимо проведение анализа индексов Каца на возможно большем объеме статистических данных и использование методов спектрального анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Блинова Е. Н. ДАН СССР, 1943, **39**, № 7, с. 284. [2] Монин А. С. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1956, № 4, с. 452. [3] Monin A. S. In: Proc. of symposium on time series analysis. N. Y.—L., 1963, p. 144. [4] Добрышман Е. М., Машкович С. А., Чубукова А. Л. В кн.: Тр. Всесоюз. науч. метеорол. сов. Л.: Гидрометеоиздат, 1963, т. 2, с. 130. [5] Машкович С. А., Добрышман Е. М., Хейфец Я. М. Характеристики зональной циркуляции. М.: Гидрометеоиздат (отделение), 1958. [6] Поток энергии Солнца и его изменения / Под ред. О. Уайта. М.: Мир, 1980. [7] Heath D. F., Wilcox J. M. et al. Solar Physics, 1975, **45**, p. 79. [8] Abdel Wahab S. M., Girgis A. H. et al. Fizika, 1980, 12, N 3, p. 241. [9] Wigley T. M. L. Nature, 1980, **288**, N 5789, p. 317. [10] King J. W. Nature, 1973, **245**, N 5426, p. 443. [11] Ebel A., Bätz W. Tellus, 1977, **29**, p. 41. [12] Сазонов Б. И., Логинов В. Ф. Солнечно-тропосферные связи. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. [13] Мустель Э. Р. Научные информации Астросовета АН СССР, 1972, вып. 24, с. 5. [14] Кац А. Л. Метеорология и гидрология, 1959, № 5, с. 3. [15] Индексы атмосферной циркуляции / Под ред. Н. В. Столыпиной. М.: Гидрометцентр СССР, 1977—1979 гг. [16] Яновский Б. М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. [17] Космические данные. М.: Наука, 1976—1979 гг. [18] Физика верхней атмосферы / Под ред. Дж. Ратклиффа. М.: ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию
15.12.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, т. 24, № 1

УДК 524.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

Л. Г. Лукьянов

(ГАИШ)

1. Задача двух тел с переменными массами недостаточно четко освещена в литературе [2—4]: почти во всех работах по задаче двух тел с переменными массами исследуются уравнения относительного движения различной формы.

В общей задаче двух тел с постоянными массами доказывается, что, используя 6 интегралов движения центра масс, можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения в абсолютной системе координат с 12-го до 6-го и записать их в виде дифференциальных уравнений относительного движения [1]. Зная общее или частное решение уравнений относительного движения, можно получить соответствующее решение уравнений движения в абсолютной системе координат алгебраическим путем с использованием интегралов движения центра масс, без дополнительных квадратур.

Рассмотрению этих вопросов для переменных масс посвящена настоящая работа.

2. На каждую из двух материальных точек с переменными, но заданными массами $m_1(t)$ и $m_2(t)$ кроме силы взаимного притяжения действует дополнительная сила, зависящая от координат точек, компонент скоростей и времени. Дифференциальные уравнения движения в абсолютной системе координат имеют вид

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 &= \frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Phi}_1(t, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \dot{\boldsymbol{\rho}}_1, \dot{\boldsymbol{\rho}}_2), \\
m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 &= -\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Phi}_2(t, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \dot{\boldsymbol{\rho}}_1, \dot{\boldsymbol{\rho}}_2),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\boldsymbol{\Phi}_1$ и $\boldsymbol{\Phi}_2$ — отмеченные выше дополнительные силы, f — гравитационная постоянная, $\mathbf{r}=\boldsymbol{\varrho}_2-\boldsymbol{\varrho}_1$, $\boldsymbol{\varrho}_1$ и $\boldsymbol{\varrho}_2$ — радиусы-векторы рассматриваемых точек.

Для произвольных дополнительных сил эти уравнения не будут иметь никаких первых интегралов, а их решение невозможно свести к решению уравнений относительного движения 6-го порядка, так как правые части невозможно выразить только через $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ и t. Для решения задачи в этом случае придется рассматривать уравнения (1). Однако это чисто математическая постановка задачи. В действительности силы, действующие на материальную точку со стороны других тел, всегда зависят не от самих координат и скоростей этих тел, а от разностей между координатами и компонентами скоростей этих тел и рассматриваемой точки, а также от времени. Именно этой природой сил объясняется инвариантность уравнений движения к преобразованию Галилея (равномерное прямолинейное движение системы координат), вследствие чего уравнения движения имеют один и тот же вид в любой инерциальной системе координат.

Учитывая такую физическую постановку задачи, уравнения движения (1) следует записать в виде

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 &= \frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \\
m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 &= -\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{F}_2(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Уравнения относительного движения легко получаются из (2) в виде

$$
\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} + \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_2(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{3}
$$

Зная решение этих уравнений, можно получить решение уравнений (2) в квадратурах:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \int\left[\frac{fm_2}{r^3}\mathbf{r} + \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\right]dt + \mathbf{A} = \boldsymbol{\psi}(t), \\
&\boldsymbol{\rho}_1 = \int\boldsymbol{\psi}(t)\,dt + \mathbf{B}, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \dot{\mathbf{r}}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{r},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные постоянные.

Для произвольных дополнительных сил уравнения (2) не имеют интегралов количества движения, но если эти силы таковы, что

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=\boldsymbol{\varphi}(t)-(\dot{m}_1\dot{\boldsymbol{\varrho}}_1+\dot{m}_2\dot{\boldsymbol{\varrho}}_2), \tag{5}$$

то уравнения имеют интегралы количества движения в виде

$$m_1\dot{\boldsymbol{\varrho}}_1+m_2\dot{\boldsymbol{\varrho}}_2-\int \boldsymbol{\varphi}(t)\,dt=\mathbf{a}, \tag{6}$$

где $\mathbf{a}$ — произвольная постоянная.

Наличие интегралов (6) позволяет исключить первую квадратуру в формулах (4), определяя $\dot{\boldsymbol{\varrho}}_1$ и $\dot{\boldsymbol{\varrho}}_2$ из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} m_1\dot{\boldsymbol{\varrho}}_1+m_2\dot{\boldsymbol{\varrho}}_2&=\int \boldsymbol{\varphi}(t)\,dt+\mathbf{a},\\ \dot{\boldsymbol{\varrho}}_2-\dot{\boldsymbol{\varrho}}_1&=\dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{7}$$

с определителем $m_1+m_2\neq 0$.

Движение центра масс в этом случае определяется из формул

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_G=\frac{1}{m_1+m_2}\left[\int \boldsymbol{\varphi}(t)\,dt+\mathbf{a}+\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{\dot{m}_2}{m_2}-\frac{\dot{m}_1}{m_1}\right)\mathbf{r}\right]=\boldsymbol{\Phi},$$

$$\boldsymbol{\rho}_G=\boldsymbol{\rho}_{G0}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}\,dt.$$

Если же уравнения не обладают интегралами (6), то координаты центра масс вычисляются по обычным формулам, но после интегрирования уравнений (2).

3. Рассмотрим наиболее часто используемый случай, когда дополнительными силами являются реактивные силы, пропорциональные скорости изменения массы тела и относительной скорости истечения частиц.

Уравнения (2) в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1&=\frac{fm_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}+\dot{m}_1\mathbf{v}_1,\\ m_2\ddot{\boldsymbol{\rho}}_2&=-\frac{fm_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}+\dot{m}_2\mathbf{v}_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где относительные скорости истечения частиц $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ считаются заданными функциями времени. Уравнения относительного движения запишутся в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{f(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}+\frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{v}_2-\frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{v}_1. \tag{9}$$

Уравнения (8) не имеют интегралов количества движения.

Зная решение уравнений (9), можно определить решение уравнений (8) в квадратурах

$$\boldsymbol{\rho}_1=\int\left[\int\left(\frac{fm_2}{r^3}\mathbf{r}+\frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{v}_1\right)dt+\mathbf{a}\right]dt+\mathbf{b},$$

$$\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}_1+\mathbf{r}.$$

Уравнения (8) можно записать в другом виде:

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\rho}_1)=\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}+\dot{m}_1\mathbf{u}_1,$$
$$\frac{d}{dt}(m_2\dot{\rho}_2)=-\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}+\dot{m}_2\mathbf{u}_2, \tag{10}$$

где $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1+\dot{\rho}_1$ и $\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2+\dot{\rho}_2$ — абсолютные скорости истечения частиц. Уравнения (10) легко получаются из (8). Однако если в уравнениях (10) абсолютные скорости истечения считать заданными функциями времени, то эти уравнения будут отличаться от уравнений (8). В частности, при заданных $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ эти уравнения будут справедливы только в абсолютной неподвижной системе координат, т. е. они, как и уравнения (1), не инвариантны к преобразованию Галилея.

Дополнительные силы в уравнениях (10) удовлетворяют условиям (5), и уравнения имеют три интеграла количества движения

$$m_1\dot{\rho}_1+m_2\dot{\rho}_2-\int(\dot{m}_1\mathbf{u}_1+\dot{m}_2\mathbf{u}_2)\,dt=\mathbf{a}. \tag{11}$$

Уравнения относительного движения можно получить из (10) в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{f(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}+\frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{u}_2-\frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{u}_1+\frac{\dot{m}_1}{m_1}\dot{\rho}_1-\frac{\dot{m}_2}{m_2}\dot{\rho}_2. \tag{12}$$

Используя тождество

$$\alpha\mathbf{C}-\beta\mathbf{D}=(\alpha-\beta)[(1-\mu)\mathbf{C}+\mu\mathbf{D}]-[\alpha\mu+\beta(1-\mu)](\mathbf{D}-\mathbf{C})$$

для $\mu=m_2/(m_1+m_2)$, $\mathbf{C}=\dot{\rho}_1$, $\mathbf{D}=\dot{\rho}_2$, $\alpha=\dot{m}_1/m_1$, $\beta=\dot{m}_2/m_2$ и учитывая интегралы (11), преобразуем уравнения (12) к виду

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{f(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}-\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}m_2+\frac{\dot{m}_2}{m_2}m_1\right)\frac{\dot{\mathbf{r}}}{m_1+m_2}+\mathbf{F}(t), \tag{13}$$

$$\text{где } \mathbf{F}(t)=\left(\frac{\dot{m}_2}{m_2}\mathbf{u}_2-\frac{\dot{m}_1}{m_1}\mathbf{u}_1\right)+$$
$$+\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}-\frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\left[\int(\dot{m}_1\mathbf{u}_1+\dot{m}_2\mathbf{u}_2)\,dt+\mathbf{a}\right]. \tag{14}$$

В частности, при $\mathbf{u}_1=\text{const}$ и $\mathbf{u}_2=\text{const}$ интегралы количества движения и функции $\mathbf{F}(t)$ имеют вид

$$m_1\dot{\rho}_1+m_2\dot{\rho}_2-m_1\mathbf{u}_1-m_2\mathbf{u}_2=\mathbf{a},$$
$$\mathbf{F}(t)=\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}-\frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\frac{\mathbf{a}}{m_1+m_2}+\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}m_2+\frac{\dot{m}_2}{m_2}m_1\right)\frac{\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1}{m_1+m_2},$$

$$\text{а если } \mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2=0, \text{ то } m_1\dot{\rho}_1+m_2\dot{\rho}_2=\mathbf{a},$$
$$\mathbf{F}(t)=\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}-\frac{\dot{m}_2}{m_2}\right)\frac{\mathbf{a}}{m_1+m_2}. \tag{15}$$

Отыскание решения уравнений (10) по известному решению уравнений относительного движения можно провести по общим формулам (7) и (4). Обычно рассматриваются частные случаи уравнений (13) для определенного вида $\mathbf{F}(t)$ [3]. В работе [5] рассмотрен случай (15).

Самый общий вид уравнений относительного движения определяется уравнениями (13) и (14).

Подводя итог, следует отметить, что, исключая чисто математические обобщения, дифференциальные уравнения движения в абсолютной системе координат 12-го порядка всегда можно свести к решению уравнений относительного движения 6-го порядка. Наиболее общий вид этих уравнений дается уравнениями (3) и (13). Знание общего решения уравнений относительного движения позволяет свести определение общего решения исходных уравнений к шести квадратурам. Если дополнительные силы удовлетворяют условию (5), то уравнения движения в абсолютной системе координат допускают три интеграла количества движения (6). Наличие интегралов количества движения позволяет вычислить скорости движения тел в абсолютной системе координат алгебраическим путем (7), без квадратур. Координаты тел вычисляются затем тремя квадратурами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. [2] Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. М.: ГИТТЛ, 1952. [3] Омаров Т. Б. Динамика гравитирующих систем метагалактики. Алма-Ата, 1975. [4] Лапин А. С. Ученые записки ЛГУ. Сер. мат. наук, 1944, вып. 13, № 87, с. 3. [5] Курышев В. И., Перов Н. И. Астрон. журн., 1981, 58, с. 886.

Поступила в редакцию
28.12.81