рируя по частотам, получим выражение для углового распределения мощности излучения неподвижного заряда:

$$P_\theta d\theta = \frac{(\Delta\varepsilon)^2 q^2\omega_0^2 \sin^3\theta\,(1+\cos^2\theta)\,d\theta}{4c\varepsilon_0^{1/2}(\omega_0)\,\varepsilon_0^2(0)}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_0(0)$ — статическое значение диэлектрической проницаемости. Интегрируя (10) по θ, найдем полную мощность излучения покоящегося заряда:

$$P = \frac{2(\Delta\varepsilon)^2 q^2\omega_0^2}{5c\varepsilon_0^{1/2}(\omega_0)\,\varepsilon_0^2(0)}. \tag{11}$$

Автор благодарит Б. М. Болотовского за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Манева Г. М. Кр. сообщ. по физике ФИАН СССР, 1977, № 2, с. 21. [2] Давыдов В. А. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 983. [3] Давыдов В. А. ЖЭТФ, 1981, **80**, № 3, с. 859. [4] Давыдов В. А. ЖЭТФ, 1982, **52**, № 12, с. 2340.

Поступила в редакцию
08.04.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, т. 24, № 1

УДК 531.19

МЕТОД АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ГАМИЛЬТОНИАНА И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА МАЙЕРА

А. П. Бакулев

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

В последнее время большое распространение в изучении модельных систем статистической физики получил метод аппроксимирующего гамильтониана. Одно из основных достоинств метода — возможность асимптотически точно (в термодинамическом пределе $N\to\infty$, $V\to\infty$, $N/V=\mathrm{const}$) вычислять объемную плотность свободной энергии модельной системы. Идеи метода восходят к первым работам Боголюбова по теории сверхтекучести и сверхпроводимости [1—3]; становление же метода как мощного средства исследования моделей связано с именем Боголюбова (мл.), которому удалось выделить большой класс модельных гамильтонианов, допускающих асимптотически точное решение [4]. Совсем недавно метод получил дальнейшее развитие в работе Курбатова и Санковича [5]. Эти авторы получили следующую оценку для близости свободных энергий (f_V) модельного ($\hat H$) и аппроксимирующего ($\hat H(C)$) гамильтонианов:

$$-\frac{\Theta}{V}\ln\left\langle \exp\left(\frac{\hat H(C)-\hat H}{\Theta}\right)\right\rangle_{H(C)} \leqslant f_V\{H\}-f_V\{H(C)\} \leqslant \left\langle \frac{\hat H-\hat H(C)}{V}\right\rangle_{H(C)}. \tag{1}$$

Здесь под знаком $\langle\ldots\rangle_H$ понимается статистическое усреднение по большому каноническому ансамблю: $\langle \hat A\rangle_\Gamma = \mathrm{Sp}\left[\hat A\exp\left(-\frac{\hat\Gamma}{\Theta}\right)\right]/$

$\mathrm{Sp}\left[\exp\left(-\frac{\hat{\Gamma}}{\Theta}\right)\right]$ (Θ — температура системы). Обычно аппроксимирующий гамильтониан $\hat{H}(C)$ представляется квадратичной формой по отношению к операторам рождения и уничтожения $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$. Поэтому для такого гамильтониана оказывается справедливой теорема Вика—Блоха—де-Доминисиса для средних от произведений операторов $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ [6], что дает принципиальную возможность вычислить средние, фигурирующие в (1). Однако непосредственное вычисление левой части (1) затруднительно (относительно легко проводится лишь ее оценка в случае простых моделей — см. [5]). Обобщенная теорема Майера позволяет записать левую часть (1) в более удобном для конкретных приложений виде. Сформулируем эту теорему.

Пусть есть M пронумерованных точек и пусть каким-то образом произведено разбиение этих точек на группы $\{C_l\}$, причем каждая точка попала в одну и только в одну группу. Рассмотрим операцию W, которая каждому такому разбиению G_M ставит в соответствие число $W(G_M)$, причем: 1) $W(G_M)$ не зависит от способа нумерации точек в G_M; 2) $W(G_M) = \prod\limits_{C_l} f_l$ (произведение берется по всем группам C_l, входящим в G_M). Введем величину $F_M = \sum\limits_{G_M} W(G_M)$, где суммирование проводится по всем возможным разбиениям, и определим функции $f(x) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} f_l \frac{x^l}{l!}$, $F(x) = 1 + \sum\limits_{M=1}^{\infty} F_M \frac{x^M}{M!}$. Теорема утверждает, что $F(x) = \exp[f(x)]$. Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства первой теоремы Майера [7], поскольку основывается только на комбинаторных законах; однако в отличие от первой теоремы Майера в формулировке обобщенной теоремы не подразумевается необходимость введения диаграмм, что позволяет отвлечься от операторной структуры конкретного гамильтониана и проводить рассмотрение в общем случае.

Для того чтобы преобразовать левую часть (1) с помощью этой теоремы, рассмотрим $\langle \hat{D}^M \rangle_{H(C)}$, где $\hat{D} = \hat{H} - \hat{H}(C)$. Это среднее по теореме Вика—Блоха—де-Доминисиса распадается на сумму всевозможных произведений попарных спариваний операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$. Назовем связной частью величины $\langle \hat{D}^M \rangle_{H(C)}$ сумму $\langle D^M \rangle^{\text{св}}$ тех слагаемых из $\langle \hat{D}^M \rangle_{H(C)}$, в которых можно начиная с произвольного оператора $\hat{D}$ подойти к любому другому оператору $\hat{D}$ путем перехода от одного к другому по спариванию, их связывающему. Сопоставим теперь операции W $\quad -f_l = \langle D^l \rangle^{\text{св}}$. Очевидно тогда, что $F_M = \langle \hat{D}^M \rangle_{H(C)}$ и, значит,

$$\left\langle \exp\left(-\frac{\hat{D}}{\Theta}\right)\right\rangle_{H(C)} = F\left(-\frac{1}{\Theta}\right) = \exp\left[\sum_{l=1}^{\infty} \langle D^l \rangle^{\text{св}} \frac{(-\Theta)^{-l}}{l!}\right].$$

Учитывая, что $\langle \hat{D} \rangle_{H(C)} = \langle D^1 \rangle^{\text{св}}$, получим

$$\frac{1}{V}\sum_{l=2}^{\infty} \langle D^l \rangle^{\text{св}} \frac{(-\Theta)^{1-l}}{l!} \leqslant f_V\{H\} - f_V\{H(C)\} - \left\langle \frac{\hat{D}(C)}{V} \right\rangle_{H(C)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

Таким образом, если удастся показать, что ряд в (2) сходится и его сумма при некоторых параметрах аппроксимации $\bar{C}$ бесконечно мала при $V \to \infty$, то можно будет заключить, что

$$\lim_{V \to \infty} f_V\{H\} = \lim_{V \to \infty} \left[f_V\{H(\bar{C})\} + \left\langle \frac{\hat{D}(\bar{C})}{V} \right\rangle_{H(\bar{C})} \right]. \tag{3}$$

В качестве примера приложения развитой методики рассмотрим следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = \hat{T} + \frac{1}{V} \sum_{p_1, p_2} K(p_1, p_2) \hat{J}^+(p_1) \hat{J}(p_2). \tag{4}$$

Операторы $\hat{J}(p)$ здесь обозначают произведения двух $\hat{a}$-операторов, а ядро K подчинено условию $\frac{1}{V^2} \sum_{p, p_2} |K(p_1, p_2)| \leqslant M_1$. Для такого гамильтониана традиционный подход неприменим (см. [4]); однако, вводя аппроксимирующий гамильтониан

$$\hat{H}(C) = \hat{T} + \frac{1}{V} \sum_{p_1, p_2} K(p_1, p_2) [\hat{J}^+(p_1) C(p_2) + \hat{J}(p_2) C^*(p_1) - C^*(p_1) C(p_2)], \tag{5}$$

можно показать, что для этой модели ряд в (2) сходится абсолютно и его сумма бесконечно мала при $V \to \infty$ для тех значений $\bar{C}(p)$, которые реализуют абсолютный минимум величины $f_V\{H(C)\} + \left\langle \frac{\hat{H} - \hat{H}(C)}{V} \right\rangle_{H(C)}$, т. е. удовлетворяют уравнениям $\bar{C}(p) = \langle \hat{J}(p) \rangle_{H(\bar{C})}$. Следовательно, для модели (4) аппроксимация (5) асимптотически точна при $C = \bar{C}$ и свободная энергия модельной системы определяется в соответствии с (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н. Вестн. Моск. ун-та, 1947, № 7, с. 43. [2] Боголюбов Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, Р-511, Дубна, 1960. [3] Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Д-781, Дубна, 1961, с. 16—24. [4] Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974, с. 92—107. [5] Курбатов А. М., Санкович Д. П. Теор. и матем. физика, 1980, 42, с. 392. [6] Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975, с. 90—97. [7] Майер Дж., Гепперт-Майер Дж. Статистическая механика. М.: ИЛ, 1952, с. 274—279.

Поступила в редакцию
27.04.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, т. 24, № 1

УДК 530.12:531.51

ТЕОРИЯ ПОГЛОТИТЕЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Ю. Турыгин

(кафедра теоретической физики)

Уравнения Максвелла допускают как запаздывающее, так и опережающее решения. Как показано в работе [1], возможно использовать симметричное во времени решение, предполагая источник окру-