Таким образом, если удастся показать, что ряд в (2) сходится и его сумма при некоторых параметрах аппроксимации $\bar{C}$ бесконечно мала при $V\to\infty$, то можно будет заключить, что

$$\lim_{V\to\infty} f_V\{H\} = \lim_{V\to\infty}\left[f_V\{H(\bar{C})\} + \left\langle\frac{\hat{D}(\bar{C})}{V}\right\rangle_{H(\bar{C})}\right]. \qquad (3)$$

В качестве примера приложения развитой методики рассмотрим следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = \hat{T} + \frac{1}{V}\sum_{p_1,p_2} K(p_1, p_2)\hat{J}^+(p_1)\hat{J}(p_2). \qquad (4)$$

Операторы $\hat{J}(p)$ здесь обозначают произведения двух $\hat{a}$-операторов, а ядро K подчинено условию $\frac{1}{V^2}\sum_{p,p_2}|K(p_1, p_2)| \leqslant M_1$. Для такого гамильтониана традиционный подход неприменим (см. [4]); однако, вводя аппроксимирующий гамильтониан

$$\hat{H}(C) = \hat{T} + \frac{1}{V}\sum_{p_1,p_2} K(p_1, p_2)\,[\hat{J}^+(p_1)C(p_2) + \hat{J}(p_2)C^*(p_1) - C^*(p_1)C(p_2)], \qquad (5)$$

можно показать, что для этой модели ряд в (2) сходится абсолютно и его сумма бесконечно мала при $V\to\infty$ для тех значений $\bar{C}(p)$, которые реализуют абсолютный минимум величины $f_V\{H(C)\} + \left\langle\frac{\hat{H}-\hat{H}(C)}{V}\right\rangle_{H(C)}$, т. е. удовлетворяют уравнениям $\bar{C}(p) = \langle\hat{J}(p)\rangle_{H(\bar{C})}$. Следовательно, для модели (4) аппроксимация (5) асимптотически точна при $C=\bar{C}$ и свободная энергия модельной системы определяется в соответствии с (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н. Вестн. Моск. ун-та, 1947, № 7, с. 43. [2] Боголюбов Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, Р-511, Дубна, 1960. [3] Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Д-781, Дубна, 1961, с. 16—24. [4] Боголюбов Н. Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974, с. 92—107. [5] Курбатов А. М., Санкович Д. П. Теор. и матем. физика, 1980, 42, с. 392. [6] Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975, с. 90—97. [7] Майер Дж., Гепперт-Майер Дж. Статистическая механика. М.: ИЛ, 1952, с. 274—279.

Поступила в редакцию
27.04.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, т. 24, № 1

УДК 530.12:531.51

ТЕОРИЯ ПОГЛОТИТЕЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Ю. Турыгин

(кафедра теоретической физики)

Уравнения Максвелла допускают как запаздывающее, так и опережающее решения. Как показано в работе [1], возможно использовать симметричное во времени решение, предполагая источник окруженным достаточным количеством материи. В этом случае полное поглощение поля источника приводит к превращению симметричного решения в полное запаздывающее. При этом причиной радиационного трения оказывается ответное поле поглотителя.

Возникает вопрос: возможно ли получить тот же результат для гравитационных взаимодействий, описываемых уравнениями Эйнштейна? В работе [2] эта задача рассматривается и дается отрицательный ответ. Однако в [2] используется модель Вселенной, не аналогичная модели [1].

В настоящей работе доказывается справедливость теории поглотителя для гравитационных взаимодействий, если следовать модели, соответствующей [1].

Рассмотрим уравнения Эйнштейна для гравитационного поля в линейном приближении. Тогда метрический тензор $g_{\mu\nu}$ может быть записан в виде $g_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu}-2kh_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1,\,-1,\,-1,\,-1)$ [3]. Если определить величины $k\Phi_{\mu\nu}=kh_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu}kh/2$, $kh=\varepsilon^{\alpha\beta}kh_{\alpha\beta}$, то уравнения поля примут вид

$$k\,\Box\,\Phi_{\mu\nu}=(8\pi k/c^4)\,T_{\mu\nu},\ \ k\Phi^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0;\ \ T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0. \tag{1}$$

Запаздывающим и опережающим решениями уравнений (1) являются

$$k\Phi^{\binom{r}{a}}_{\mu\nu}=\frac{2k}{c^4}\int\frac{1}{r^*}\,T^{\binom{r}{a}}_{\mu\nu}\,d^3x',\ \ T^{\binom{r}{a}}_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}\left(x',\,y',\,z',\,t\mp\frac{r^*}{c}\right), \tag{2}$$

где $d^3x'=dx'dy'dz'$, $r^*=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

В качестве источника гравитационного поля возьмем, следуя [2], линейный квадруполь, колеблющийся вдоль оси z под действием негравитационных сил и имеющий следующие параметры:

$$z_1=-z_2=\frac{1}{2}(b+\zeta),\ \ b=\mathrm{const};\ \ \zeta=Ae^{-i\omega t},\ \ 0<A\ll b,$$

$A=\mathrm{const}$, $m_1=m_2=m$. Решение уравнений (1) для поля такого квадруполя известно [4] ($B\equiv 2mbA\omega^2k/c^4$; $(\omega/c)r\gg 1$):

$$kh^{\binom{r}{a}}_{00}=kh^{\binom{r}{a}}_{33}=-\frac{B}{2r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^{\binom{r}{a}},$$

$$kh^{\binom{r}{a}}_{11}=kh^{\binom{r}{a}}_{22}=\frac{B}{2r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^{\binom{r}{a}}, \tag{3}$$

$$kh^{\binom{r}{a}}_{03}=\pm\frac{B}{r}\frac{z}{r}\psi^{\binom{r}{a}};\ \ \psi^{\binom{r}{a}}\equiv e^{-i\omega t\pm i(\omega/c)r}.$$

Как и в [2], поглотитель предположим состоящим из практически свободных частиц, находящихся в покое и приобретающих движение, согласно уравнению геодезической, вследствие влияния поля источника, которое будем считать полным запаздывающим [1]. Тензор энергии-импульса поглотителя, индуцированный этим полем, найден в [2] и имеет вид

$$T^{00}=\frac{B\rho_0c^2}{2r}\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^{(r)},\ \ T^{0i}=\rho_0\dot{x}^i, \tag{4}$$

$$T^{11}=T^{22}=\frac{B\rho_0c^2}{2r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^{(r)},\ \ T^{33}=-\frac{B\rho_0c^2}{2r}\left(3-\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^{(r)},$$

где

$$\dot{x} = \frac{B}{2r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\frac{cx}{r}\psi^{(r)}, \quad \dot{y} = \frac{B}{2r}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\frac{cy}{r}\psi^{(r)},$$

$$\dot{z} = -\frac{B}{2r}\left(3-\frac{z^2}{r^2}\right)\frac{cz}{r}\psi^{(r)}.$$

Будем считать, как и в [1], источник помещенным внутрь сферической полости радиуса R_0 (т. е. поглотитель занимает весь бесконечный объем вне этой сферы) и запаздывающее поле источника распространяющимся в поглотителе с фазовой скоростью $V=c/n$ (n — показатель преломления), а ответное поле частиц поглотителя — со скоростью света, причем последнее является элементарным ($kh_{\mu\nu}^{(a)}/2$). Показатель преломления в рамках рассматриваемой модели рассчитан в [5] и равен $n=1+8\pi k\rho_0/\omega^2$.

Подсчитаем ответное поле в точке P на расстоянии $\mathbf{r}=\{r, \theta_0, \varphi_0\}=\{x, y, z\}$ от источника внутри полости. Пусть какая-либо частица поглотителя характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{r}'=\{r', \theta, \varphi\}=\{x', y', z'\}$. Тогда в формуле (2) в знаменателе нужно положить $r^*=r'$. Для фазового множителя в точке P аналогично [1] получаем

$$\exp\left[-i\omega t + i\frac{\omega}{c}(n-1)(r'-R_0) + i\frac{\omega}{c}r\cos(\theta-\theta_0)\right] \equiv \psi_P.$$

Подставим (4), где вместо $\psi^{(r)}$ следует взять ψ_P, в формулу (2). Вычисление полученных так интегралов производится во вспомогательной системе координат, определенной в [2]. В результате найдем

$$k\overset{*}{h}{}_{00}^{(a)} = k\overset{*}{h}{}_{12}^{(a)} = k\overset{*}{h}{}_{13}^{(a)} = k\overset{*}{h}{}_{23}^{(a)} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{11}^{(a)} = \frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{22}^{(a)} = \frac{2\pi B\rho_0 kR}{ic\omega r}\left[\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^- + \left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)\left(\frac{ic}{\omega r}\psi^+ - \frac{c^2}{\omega^2 r^2}\psi^-\right)\right], \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{33}^{(a)} = -\frac{2\pi B\rho_0 kR}{ic\omega r}\left[\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^- + \left(3\frac{z^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{ic}{\omega r}\psi^+ - \frac{c^2}{\omega^2 r^2}\psi^-\right)\right], \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{01}^{(a)} = -\frac{\pi B\rho_0 kR}{ic\omega r}\frac{x}{r}\left[\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^+ + \frac{6ic}{\omega r}\frac{z^2}{r^2}\psi^- + 3\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)\left(\frac{c^2}{\omega^2 r^2}\psi^+ + \frac{ic^3}{\omega^3 r^3}\psi^-\right)\right], \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{02}^{(a)} = \frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{01}^{(a)}\operatorname{tg}\varphi_0,$$

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}_{03}^{(a)} = \frac{\pi B\rho_0 kR}{ic\omega r}\frac{z}{r}\left[\left(3-\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^+ + \frac{6ic}{\omega r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\psi^- - 3\left(3-5\frac{z^2}{r^2}\right)\left(\frac{c^2}{\omega^2 r^2}\psi^+ + \frac{ic^3}{\omega^3 r^3}\psi^-\right)\right], \tag{9}$$

где

$$\psi^- \equiv \psi^{(r)} - \psi^{(a)}, \quad \psi^+ \equiv \psi^{(r)} + \psi^{(a)}, \quad R \equiv \int_{R_0}^{\infty} e^{i(\omega/c)(n-1)(r'-R_0)}\,dr'.$$

Интеграл по r' вычисляется аналогично тому, как это сделано в работе [1], и равен $R=i\omega c/8\pi k\rho_0$. На расстоянии нескольких длин волн от источника в (6)—(9) следует оставить только линейные по $c/\omega r$ слагаемые [1].

Нас интересуют не сами поля (5)—(9), а их комбинации, входящие в уравнения движения. В случае пробной частицы это уравнение геодезической, которое в рассматриваемом приближении имеет вид $\ddot{x}^i/c^2 = -2k(h_{0i,0}-h_{00,i}/2)$. Используя формулы (3), (5)—(9), легко получить, что на расстоянии нескольких длин волн

$$kh_{01,0}-\frac{1}{2}kh_{00,1}=-\frac{1}{4}(kh^{(r)}_{00,1}+kh^{(a)}_{00,1})+\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}^{(a)}_{01,0}=-\frac{1}{2}kh^{(r)}_{00,1}.$$

Аналогично: $k(h_{02,0}-h_{00,2}/2)=-kh^{(r)}_{00,2}/2$, $k(h_{03,0}-h_{00,3}/2)=k(h^{(r)}_{03,0}-h^{(r)}_{00,3}/2)$. Таким образом, ускорение пробной частицы определяется только запаздывающим полем источника. Ускорение пробного квадруполя в его собственной системе отсчета за счет волн имеет вид $d^2x^i/dt^2 = c^2R^i_{00j}x^j$[3]. Непосредственный расчет по формулам (3), (5)—(9) приводит к тому, что все компоненты тензора Римана также определяются только запаздывающим полем источника.

Согласно ОТО, гравитационное радиационное трение в данном приближении описывается выражением $-\Phi_{,j}$, где $\Phi=\overset{(5)}{I}_{ik}x^ix^k/5$, $\overset{(5)}{I}_{ik}$ — 5-я производная по времени от приведенного квадрупольного момента [3]. В данном случае $I_{zz}=4mb\zeta/3$, $-\Phi_{,z}=-8mb^2k\zeta^{(5)}/15c^5$. Вычислим влияние поля поглотителя на источник, определяемое из уравнения движения квадруполя, которое принимает здесь вид $\ddot{z}=c^2R^3_{003}z$. Компоненты $k\overset{*}{h}{}^{(a)}_{33}$, $k\overset{*}{h}{}^{(a)}_{00}=0$, $k\overset{*}{h}{}^{(a)}_{03}$ из (5), (6), (9) разложим в ряд по координатам вблизи начала координат:

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}^{(a)}_{33}\simeq-\frac{Bi\omega}{2c}\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{15}\frac{\omega^2}{c^2}(3x^2+3y^2+4z^2)\right]e^{-i\omega t}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}k\overset{*}{h}{}^{(a)}_{03}\simeq-\frac{B\omega^2}{5c^2}ze^{-i\omega t}. \tag{11}$$

Используя (10), (11) и значение B из (3), получим

$$\ddot{z}=\frac{8}{15}mb^2\frac{k}{c^5}Ai\omega^5e^{-i\omega t}=-\frac{8}{15}mb^2\frac{k}{c^5}\zeta^{(5)},$$

что совпадает с выражением для гравитационного радиационного трения в ОТО.

Таким образом, результаты, полученные в [1] для электродинамики, остаются в силе и для гравитационного взаимодействия.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Владимирову за постановку задачи, обсуждение результатов и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Wheeler J. A., Feynman R. P. Rev. Mod. Phys., 1945, 17, p. 157. [2] Rosen N. Gen. Rel. Grav., 1979, 10, p. 351. [3] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977, т. 3. [4] Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. М.: ИЛ, 1962. [5] Турыгин А. Ю. Деп. ВИНИТИ, № 3448—82 Деп.

Поступила в редакцию
17.05.82