УДК 531.51:524.8.004.14

РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРНОЙ ДЫРОЙ

А. Б. Гаина, Г. А. Чижов

(кафедра квантовой теории)

Исследование задачи о рассеянии элементарных частиц методами квантовой теории в низших порядках теории возмущений и в приближении слабого рассеивающего поля начато в работах [1—4]. Указанный подход применим в случае малого по сравнению с длиной волны частицы радиуса центрального тела (см. также более поздние работы зарубежных авторов по рассеянию безмассовых частиц [5—8]). В случае слабого поля Шварцшильда рассеяние скалярных и векторных частиц подчиняется резерфордовскому распределению по углам (см. [2—4]). Аналогичное утверждение справедливо и для рассеяния электронов на малые углы [2—4]. Сечение рассеяния фотонов, полученное указанными методами [1], совпадает с точной формулой для рассеяния в ньютоновском поле точечной массы [5]. Рассматривались также поляризационные эффекты, связанные со спином частиц и вращением центрального тела [9—11, 8]. В частности (см. [9] и [11]), вычисления во втором порядке теории возмущений на фоне линеаризованного поля Шварцшильда обнаруживают существование поляризационных эффектов для фотонов.

Однако если размеры центрального тела близки к гравитационному радиусу, постньютоновские члены в потенциале взаимодействия окажут влияние на картину рассеяния и учет линейных членов будет недостаточным. В случае образования черной дыры представляют интерес процессы поглощения частиц, а также их влияние на рассеяние. Образование горизонта событий может привести к поляризационным эффектам при рассеянии частиц со спином даже в центральных полях.

Наличие заряда у дыры, наряду с моментом вращения, сильно влияет на характер поглощения в связи с возможностью процессов рождения частиц (на классическом языке — явление суперрадиации для бозонов [12—15]). В то же время поведение фермионов в полях Керра—Ньюмана весьма отлично от поведения бозонов. В частности, отсутствует суперрадиация [16]. В случае сферически-симметричного поля Шварцшильда сечение поглощения слаборелятивистских электронов малой дырой ($r_g/\lambda \ll 1$, где r_g — гравитационный радиус дыры) составляет 1/8 от соответствующей величины для скалярной частицы [17]. Представляет интерес исследование влияния заряда и углового момента дыры на сечение поглощения электронов.

Адекватным способом рассмотрения подобных процессов является анализ точных решений уравнений Клейна—Гордона и Дирака с использованием процедуры разделения переменных. Такой подход позволяет получить волновую функцию состояний, отвечающих сохраняющимся величинам инфинитного движения частицы. Волновую функцию задачи рассеяния можно выразить через волновые функции состояний с заданными квантовыми числами и, таким образом, получить соответствующие сечения процессов.

1. Рассмотрим рассеяние скалярной частицы массы μ и заряда e в поле Райсснера—Нордстрема (система единиц $c=\hbar=G=1$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 -$$

$$-\left(1-\frac{2M}{r}-\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\,\theta^2 + \sin^2\theta\cdot d\,\varphi^2),$$

где M, Q — масса и заряд дыры. Лагранжиан системы имеет вид

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - ie\,A_\mu)\,\Phi\, g^{\mu\nu}(\partial_\nu - ie\,A_\nu)\,\Phi^* - \mu^2\Phi\Phi^*,$$

где вектор-потенциал A_μ имеет компоненты: $A_t = -Q/r$. $A_r=0$, $A_\theta=0$, $A_\varphi=0$. Обобщенные уравнения Клейна—Гордона:

$$(-g)^{-1/2}\partial_\nu[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}(\partial_\mu - ie\,A_\mu)]\,\Phi - ie\,A^\nu\partial_\nu\Phi - (e^2 A_\mu A^\mu - \mu^2)\,\Phi = 0$$

$$(-g)^{-1/2}\partial_\nu[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}(\partial_\mu + ie\,A_\mu)]\,\Phi^* + ie\,A^\nu\partial_\nu\Phi^* - (e^2 A_\mu A^\mu - \mu^2)\Phi^* = 0.$$

Нижнее уравнение отличается от верхнего лишь знаком заряда. В дальнейшем будем рассматривать уравнение для функции Φ. Радиальная часть волновой функции, отвечающей состоянию с определенной энергией ω, орбитальным моментом l и его проекцией m на некую ось z,

$$\Phi_{\omega,l,m} = (1/r)\,R_{\omega,l}(r)\,Y_l^m(\theta,\,\varphi)\,e^{-i\omega t},$$

представляет собой на бесконечности сумму падающей и расходящейся волн:

$$R_{\omega,l} = \exp(-i\,\omega\,vr - i\,\eta\cdot\ln 2\omega\,vr) + $$
$$+ A_l(\omega)\exp(i\,\omega\,vr + i\eta\ln 2\omega\,vr),$$

где $v=(1-\mu^2/\omega^2)^{1/2}$. Величина η обязана кулоновской части в потенциале взаимодействия частицы с дырой: $\eta=[\omega M(1+v^2)+Z\alpha]/v$, где $Z\alpha=eQ$. Амплитуда расходящейся волны $A_l(\omega)$ определяется из граничного условия на горизонте $r_+ = M + \sqrt{M^2-Q^2}$:

$$R_{\omega,l} = \exp[-i(\omega + Z\,\alpha/r_+)\,r^*], \text{ где } \frac{dr^*}{dr} = \left(1-\frac{2M}{r}-\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}.$$

В задаче о рассеянии потока частиц, распространяющихся вдоль оси z, асимптотическое поведение волновой функции имеет вид

$$\Psi = \exp(-i\,\omega\,t)\,\{\exp[i\,\omega\,vz - i\eta\cdot\ln\omega\,v(r-z)] + $$
$$+ [f(\theta)/r]\exp(i\,\omega\,vr + i\eta\cdot\ln 2\omega\,vr)\}.$$

Разложение амплитуды упругого рассеяния по собственным состояниям дает

$$f(\theta) = \frac{i}{2\omega\,v}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-S_l)\,P_l(\cos\theta),\ \ S_l = (-1)^{l+1}A_l,$$

а для полного сечения упругого рассеяния имеем:

$$\sigma_e = \frac{\pi}{\omega^2 v^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1-S_l|^2.$$

Полное сечение поглощения в таком случае имеет вид

$$\sigma_A = \frac{\pi}{\omega^2 v^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1-|S_l|^2) = \frac{\pi}{\omega^2 v^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,T_l.$$

В частности, при $\mu M \sim |Z\alpha| \ll l$ и $v^2 \ll 1$ процедура сшивания решений радиального уравнения дает

$$A_l(\omega) \approx (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(1+l-i\eta)}{\Gamma(1+l+i\eta)} \left(1 - \frac{1}{2} T_l\right) = (-1)^{l+1} S_l^C \left(1 - \frac{1}{2} T_l\right), \tag{1}$$

где $S_l^C(\eta)$ — кулоновские матричные элементы оператора рассеяния, а парциальный коэффициент поглощения получается в виде

$$T_l(\omega) = 2\Gamma [2\omega v (r_+ - r_-)]^{2l+1} \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \times$$

$$\times \frac{(l!)^6}{(2l)!^2 (2l+1)!^2} \prod_{k=1}^{l} \left(1 + 4\frac{\Gamma^2}{k^2}\right) \left(1 + \frac{\eta^2}{k^2}\right).$$

Здесь введено обозначение: $\Gamma = (\omega r_+ + Z\alpha) r_+/(r_+ - r_-) \approx 2\omega M + Z\alpha$, так как в нашем приближении $Q \ll M$ и $r_+ \approx 2M$, $r_- \approx 0$.

Таким образом, в случае $\mu M \sim |Z\alpha| \ll 1$, $v^2 \ll 1$ величина полного сечения поглощения определяется в основном радиальным вкладом T_0:

$$\sigma_A = \frac{16\pi M^2}{v^2} \left(1 + \frac{Z\alpha}{2\omega M}\right) \cdot 2\pi\omega M \frac{1 + v^2 + Z\alpha/\omega M}{1 - \exp\{-2\pi\omega M/v\,(1 + v^2 + Z\alpha/\omega M)\}}.$$

Это сечение становится отрицательным при $Z\alpha < -2\omega M$, т. е. когда выполняется условие суперрадиации (см. [15]). Амплитуда упругого рассеяния представима в виде

$$f(\theta) = f_\eta^C(\theta) + \frac{i}{4\omega v} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_l S_l^C(\eta) P_l(\cos\theta),$$

где $f_\eta^C(\theta)$ — кулоновская амплитуда упругого рассеяния:

$$f_\eta^C(\theta) = \frac{\eta}{2\omega v} \frac{\Gamma(1-i\eta)}{\Gamma(1+i\eta)} \frac{\exp[2i\eta \cdot \ln\sin(\theta/2)]}{\sin^2(\theta/2)}.$$

Если $(1+v^2)\omega M + Z\alpha \neq 0$, то, ограничиваясь лишь поглощением s-волны, получим резерфордовское распределение рассеяния по углам с поправкой

$$\frac{d\sigma_e}{\partial\Omega} = M^2 \frac{(1 + v^2 + Z\alpha/\omega M)^2}{4v^4 \sin^4(\theta/2)} \times$$

$$\times \left\{1 + 32\pi \frac{\omega^2 M^3 v}{1 - \exp(-2\pi\eta)} \left(1 + \frac{Z\alpha}{2\omega M}\right) \sin^2(\theta/2) \sin[2\eta \cdot \ln\sin(\theta/2)]\right\}.$$

Если поглощение не учитывается, то при $Q = 0$ получаем результат Мицкевича [2, 3]. При $\eta \approx 0$, когда ньютоновское притяжение компенсируется кулоновским электрическим отталкиванием, $f_\eta^C(\theta) \to 0$ и сечение упругого рассеяния слабо зависит от угла:

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} \approx 16 M^2 (2\omega M + Z\alpha)^2 \left[1 + \frac{1}{3} (\omega v M)^2 \cos\theta\right].$$

2. В случае электронов воспользуемся процедурой разделения переменных для уравнения Дирака, предложенной Чандрасекаром и Пейджем. В приближении $\mu M \sim |Z\alpha| \ll 1$, $v^2 \ll 1$ получим волновые функции состояний инфинитного движения, удовлетворяющих условию захвата на горизонте r_+ и отвечающих заданным значениям энергии ω,

проекции полного момента на ось вращения дыры m_j, а также константы разделения λ. В нашем случае (см. [18]):

$$\lambda^2(a) \approx \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - 2a\omega m_j + \frac{1}{2}\frac{a\omega m_j}{j(j+1)},$$

где $j = 1/2, 3/2, \ldots, \quad m_j = 1/2, 3/2, \ldots, \pm j$.

Для парциального коэффициента поглощения получим

$$T^{\pm}_{\lambda, m_j}(\omega) = \left[\frac{\omega v (r_+ - r_-)}{2}\right]^{1+2l} \frac{4\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \prod_{r=1}^{l}\left(1 + \frac{\eta^2}{r^2}\right) \frac{l!^2}{(2l)!\,(2l+1)!} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\prod_{p=1}^{l}\left[1 + \frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right] \frac{4(2l+1)!}{(\omega+\mu)(r_+ - r_-)} \\ \displaystyle\prod_{p=1}^{l+1}\left[1 + \frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right] \frac{(\omega+\mu)(r_+ - r_-)}{4(2l+1)} \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2},$$

$$\Gamma = [(r_+^2 + a^2)\omega - m_j a + Z\alpha r_+]/(r_+ - r_-),$$

$$l = \left|\lambda(0) + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = \begin{cases} |\lambda(0)| = j + \frac{1}{2}, & \lambda > 0, \\ |\lambda(0)| - 1 = j - \frac{1}{2}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Знаки $\pm$ в (2), так же как верхние и нижние выражения в фигурных скобках, отвечают случаям $\lambda>0$ и $\lambda<0$ соответственно. Коэффициент T не меняет знак при $\Gamma<0$, что связано с отсутствием суперрадиации для фермионов. В случае сферической симметрии ($a=0$) j становится известным квантовым числом, а величина λ переходит в собственное значение k оператора $\mathbf{K} = \beta[(\sigma\mathbf{L}) + 1]$ для уравнения Дирака в центральном поле. В предельном случае поля Шварцшильда получаем результат Унру [17]. Зависимость T от знака λ обусловлена гравитационным спин-орбитальным взаимодействием. На самом деле, в пределе $\mu \to 0$ величина T становится вырожденной по знаку λ. В этом случае формулу (2) можно компактно записать через j либо $|k|$ и при $e=0$, $Q=0$ получаем результат Пейджа [19] для нейтрино.

Рассмотрим далее рассеяние электронов в поле Райсснера—Нордстрема. Амплитуда рассеяния определяется коэффициентами A и B [20]:

$$A = \frac{1}{2i\omega v}\sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)(S_l^- - 1) + l(S_l^+ - 1)]\,P_l(\cos\theta),$$

$$B = \frac{1}{2\omega v}\sum_{l=0}^{\infty}(S_l^- - S_l^+)\,P_l^1(\cos\theta), \quad (3)$$

где знаки $\pm$ относятся к состояниям с $k>0$ и $k<0$ соответственно. Дифференциальное сечение рассеяния, усредненное по спиновым состояниям падающих частиц и просуммированное по спиновым состояниям частиц рассеянного потока, в случае неполяризованного начального состояния пучка равно

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = |A|^2 + |B|^2.$$

Если в системе имеется поглощение, то полное сечение поглощения можно записать в виде

$$\sigma_A = \frac{\pi}{\omega^2 v^2} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(1-|S_l^-|^2) + l(1-|S_l^+|^2)] =$$

$$= \frac{\pi}{\omega^2 v^2} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)T_l^- + lT_l^+] = \frac{\pi}{\omega^2 v^2} \sum_k |k| T_k.$$

В рассматриваемом длинноволновом приближении по аналогии с (1) можно получить следующее выражение для амплитуды расходящейся волны:

$$A_l^{\pm}(\omega) \approx (-1)^{l+1} S_l^C(\eta)(1 - T_l^{\pm}/2). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим коэффициенты A и B:

$$A = f_\eta^C(\theta) + \frac{i}{4\omega v} \sum_{l=0}^{\infty} \{(l+1)T_l^- + lT_l^+\} S_l^C(\eta) P_l(\cos\theta),$$

$$B = \frac{1}{4\omega v} \sum_{l=1}^{\infty} (T_l^+ - T_l^-) S_l^C(\eta) P_l^1(\cos\theta).$$

Величина сечения поглощения, так же как и в скалярном случае, определяется главным образом поглощением s-волны:

$$\sigma_A = \frac{\pi M^2}{v^2}\left(1 + \frac{\mu}{\omega}\right) 2\pi\omega M \frac{1 + v^2 + Z\alpha/\omega M}{1 - \exp\{(-2\pi\omega M/v)(1 + v^2 + Z\alpha/\omega M)\}}. \tag{5}$$

Оно, очевидно, растет с ростом электрического притяжения. Коэффициент B, определяющий поляризационные эффекты, в рассматриваемом приближении не обращается в ноль лишь благодаря поглощению. Нетрудно убедиться, что в результате поглощения рассеянный пучок окажется поляризованным с вектором поляризации, перпендикулярным плоскости рассеяния. Ограничиваясь вкладом $p_{1/2}$-волны, получим для вектора поляризации рассеянных частиц

$$\mathbf{P} = -4\pi \frac{(1-\mu/\omega)(\omega M)^2 v}{1 - \exp(-2\pi\eta)} \sin^3\frac{\theta}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{\theta}{2}\left\{(\eta^2 - 1)\cos\left(2\eta\cdot\ln\sin\frac{\theta}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\eta\cdot\sin\left(2\eta\ln\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\} [\mathbf{n}, \mathbf{n}']. \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что степень поляризации $\Delta(\theta)$ является осциллирующей функцией угла. Она исчезает при $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Если $\eta \gg 1$, т. е. $1 \gg \omega M \gg v \to 0$, абсолютная величина вектора поляризации мала: $\sim(\omega M)^4$. Однако при $v \gg \omega M$ эффект становится существенным, пропорциональным ωM, и соответствует по величине поляризационным явлениям порядка $Z\alpha$, возникающим при рассеянии электронов в кулоновском поле ядра (см. [20]), а также эффектам, рассчитанным в [9] и [11] для фотонов. В обоих последних случаях вычисления проводятся с учетом второго приближения теории возмущений. Горизонт событий, таким образом, является «поляризатором». Приведем также формулу для дифференциального сечения рассеяния электронов с поправкой на поглощение:

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = M^2 \frac{[1 + v^2 + Z\alpha/(\omega M)]^2}{4v^4 \cdot \sin^4(\theta/2)} \times$$
$$\times \left\{1 + 2\pi(1 + \mu/\omega)\frac{(\omega M)^2 v}{1 - \exp(-2\pi\eta)} \sin^2(\theta/2) \sin[2\eta \cdot \ln \sin(\theta/2)]\right\}. \quad (7)$$

Здесь, очевидно, не учтены релятивистские эффекты.

3. Результаты пп. 1 и 2 применимы для рассмотрения процессов рассеяния и поглощения безмассовых частиц спинов 0 и 1/2 в приближении $\omega M \ll 1$. Для этого в формулах необходимо осуществить предельный переход $\mu \to 0$*, а для нейтрино также $e \to 0$. В частности, для дифференциального сечения рассеяния нейтрино получим

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = \frac{M^2}{\sin^4(\theta/2)} \left\{1 + \frac{1}{4}(\omega M) \sin^2\theta \cdot \sin(4\omega M \cdot \ln \sin(\theta/2)]\right\}. \quad (8)$$

Степень поляризации рассеянных частиц:

$$\Delta(\theta) = (\omega M) \cdot \sin^3(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2) \cdot \cos[4\omega M \cdot \ln \sin(\theta/2)]. \quad (9)$$

Приведенные формулы позволяют также найти сечение поглощения нейтрино:

$$\sigma_A = (\pi/\omega^2)(T_0^- + T_1^+) = 2\pi M^2.$$

Последнее выражение совпадает с полученным ранее результатом Пейджа [19].

Авторы выражают благодарность проф. И. М. Тернову и д-ру В. Р. Халилову за обсуждение результатов и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пийр И. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭССР, 1957, № 5, с. 41. [2] Мицкевич Н. В. Физические поля в ОТО. М.: Наука, 1969. [3] Мицкевич Н. В. ЖЭТФ, 1958, **34**, с. 1656. [4] Владимиров Ю. С. Изв. вузов. Сер. Физика, 1964, № 6, с. 82. [5] Westerwelt P. J. Phys. Rev., 1971, **D3**, p. 2319. [6] Fabbri R. Phys. Rev., 1975, **D12**, p. 933. [7] Peters P. C. Phys. Rev., 1976, **D13**, p. 775. [8] de Logi W. K., Kovacs S. Jr. Phys. Rev., 1977, **D16**, p. 237. [9] Владимиров Ю. С., Исхаков И. Ф. Изв. вузов. Сер. Физика, 1970, № 4, с. 45. [10] Исхаков И. Ф. Изв. вузов. Сер. Физика, 1971, № 4, с. 38. [11] Исхаков И. Ф. Канд. дис. М.: МГУ, 1971. [12] Зельдович Я. Б. Письма в ЖЭТФ, 1971, **14**, с. 270. [13] Старобинский А. А. ЖЭТФ, 1973, **64**, с. 48. [14] Ruffini R., Denardo G. Phys. Lett., 1973, **45B**, p. 259. [15] Gibbons G. W. Comm. Math. Phys., 1975, **44**, p. 245. [16] Lee C. H. Phys. Lett., 1977, **68B**, p. 152. [17] Unruh W. G. Phys. Rev., 1976, **D14**, p. 3251. [18] Тернов И. М., Гаина А. Б., Чижов Г. А. Изв. вузов. Сер. Физика, 1980, № 8, с. 56. [19] Page D. N. Phys. Rev., 1976, **D14**, p. 1509. [20] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.

* Отметим, однако, что переход к ультрарелятивистской массивной частице $v \to 1$ при $\mu \neq 0$ в [17] дает неверный результат.

Поступила в редакцию
02.10.79
После переработки
26.06.82