На рис. 4 показан пример записи нестационарной генерации в СГ, возникающей при замыкании цепи обратной связи. Экспериментальное изучение процессов установления стационарного режима генерации и динамической неустойчивости проводилось на СГ с оптической накачкой, работающем на изотопе ртути ^{199}Hg с регистрацией поперечного сигнала по эффекту Фарадея [15]. Поскольку спин ядра изотопа ^{199}Hg равен 1/2, то в соответствии с [16] движение оптически ориентированных ядер атомов ртути описывается уравнениями Блоха, используемыми выше для описания СГ. Наблюдение продольной компоненты намагниченности проводилось с помощью фотоприемника, регистрирующего луч накачки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dunsmuir R. J. Electron. and Control, 1961, 10, N 6, p. 453. [2] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. [3] Леше А. Ядерная индукция. М.: ИЛ, 1963. [4] Абрагам А. Ядерный магнетизм. М.: ИЛ, 1963. [5] Умарходжаев Р. М. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1971, **14**, № 8, с. 1189. [6] Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952. [7] Умарходжаев Р. М. Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1964, 7, с. 1207. [8] Померанцев Н. М., Рыжков В. М., Скроцкий Г. В. Физические основы квантовой магнитометрии. М.: Наука, 1972. [9] Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. М.: Сов. радио, 1975, т. 2. [10] Кузнецов П. И., Малыхин Л. И. Электричество, 1967, 7, с. 82; Kymmer F., Retzlaff G. Zs. Angew. Phys., 1969, 27, N 6, p. 371. [11] Морозов А. А., Москалев В. В. В кн.: Ядерный магнитный резонанс. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968, ч. II, с. 48. [12] Капцов Л. Н. Радиотехн. и электроника, 1975, 20, № 12, с. 2496. [13] Прохоров А. М. Радиотехн. и электроника, 1963, 8, № 6, с. 1073. [14] Wagner W. G., Lenguel B. A. J. Appl. Phys., 1963, **34**, N 7, p. 2040. [15] Manuel J., Cohen-Tannoudji Cl. Compt. Rend., 1963, **B-257**, p. 413. [16] Cohen-Tannoudji Cl. Ann. de Phys., 1962, 7, p. 423—460; 471—503.

Поступила в редакцию
22.02.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 2

УДК 532.517.4.627.157

АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ПРИМЕРЕ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ РУСЛОВОГО ПОТОКА

В. П. Петров, О. П. Петросян, И. П. Харченко

(кафедра физики моря и вод суши)

Для статистического анализа пульсаций скорости руслового потока обычно определяют следующие параметры: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии, эксцесс, корреляционные и спектральные функции.

Выражения для корреляционных и спектральных функций для практических расчетов на ЭВМ приводились соответственно к виду

$$R(\tau_m) = \frac{1}{D_u}\frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m}[[u(t_i)-m_u][u(t_i+\tau_m)-m_u],$$

$$S(f_i) = 2\Delta t\left[R_0 + 2\sum_{k=1}^{M-1} w_t(\tau)R(\tau)\cos\frac{\pi ki}{F}\right],$$

где D_u — дисперсия, m_u — математическое ожидание, $\tau_m=m\Delta t$, $m=$ $=0, 1, 2, ..., M-1$, M — точка отсечения корреляционной кривой, о которой еще будет сказано ниже, Δt — шаг дискретности, $w_t(\tau)$ — так называемое спектральное окно, которое позволяет исключить низкочастотные колебания, не обеспеченные длиной реализации, и рассчитывается как

$$w_t(\tau) = w_t(k\Delta t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi k}{t}\right).$$

При $w_t(\tau)=1$ сглаживание не применяется. Кроме того,

$$f_i = i\Delta f; \quad \Delta f = 1/2F\Delta t; \quad 1 \leqslant i \leqslant F.$$

Перед вычислением корреляционных функций и функций спектральной плотности исходный массив значений пульсаций скорости проверялся на стационарность. Исследуемые реализации оказались нестационарными по математическому ожиданию, что вызывается ограничением длины реализации по времени. Для приведения исходного ряда к стационарному виду и проводилась фильтрация, исключающая те низкочастотные колебания, которые не обеспечены длиной реализации. При этом необходимо учитывать, что в связи с преобразованием исходного ряда диапазон исследуемых частот должен измениться.

Обычно при обработке без применения спектральных окон считали, что диапазон исследуемых частот ограничен снизу частотой, связанной с длиной реализации по времени, т. е.

$$f = 10/T \text{ Гц}.$$

Рассмотрим ограничение, вводимое спектральным окном. Как известно, основное содержание того или иного способа фильтрации заключается в выборе математического ожидания и дисперсии, которые считаются не для всего ряда, а для группы членов этого ряда. Практическое исследование влияния параметров высокочастотных фильтров на спектральные характеристики приведено в работе [1]. Теоретически же вопрос о выборе параметров фильтров в литературе рассмотрен недостаточно.

Для выбора высокочастотного фильтра сравнивались частотные характеристики двух часто используемых линейных фильтров: «скользящее среднее» (СС) и «скользящее среднее с косинус-ядром Тьюки» (ССТ) [2]. Частотная характеристика в данном случае показывает, какова будет величина амплитуды косинусоиды на выходе фильтра, если на его входе косинусоида была с единичной амплитудой, т. е.

$$\cos 2\pi ft \rightarrow \boxed{G(f)} \rightarrow G(f)\cos 2\pi ft,$$

где $G(f)$ — частотная характеристика фильтра.

В случае дискретных рядов фильтр СС, который для анализа нестационарных процессов был применен в работе [3] и в котором весовой коэффициент равен единице, переводит ряд u_k в ряд $\widetilde{u}_k$, члены которого определяются выражением

$$\widetilde{u}_k = u_k - \frac{1}{2l+1}\sum_{i=-l}^{l} h_i u_{k+i},$$

где $h_i = h_{-i} = 1$ для $i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm l$,

$$h_0 = 1 - 1/(2l+1),$$

l — параметр фильтра.

Для фильтра ССТ, в котором весовой коэффициент отличен от единицы, $\tilde{u}_k$ определяется как

$$\tilde{u}_k = u_k - \frac{1}{2l} \sum_{i=-l}^{l} \left(1 + \cos \frac{\pi i}{l}\right) u_{k+i} = \sum_{i=-l}^{l} h_i u_{k+i},$$

где

$$h_i = h_{-i} = 1 + \cos(\pi i/l) \text{ для } i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm l,$$
$$h_0 = 1 - 1/l,$$

l — параметр фильтра. Нормировка для фильтров выбрана так, что $\tilde{u}_k = 0$, если $u_k = \mathrm{const}$. Подставляя вместо u_k функцию $\cos 2\pi f i\Delta$ ($t = i\Delta$ для дискретных рядов, Δ — шаг дискретности) так, что $u_k = 1$ при $i = 0$, получаем

$$G_1(f) = 1 - \frac{2}{2l+1} \sum_{i=1}^{l} \cos 2\pi f i\Delta,$$

$$G_2(f) = 1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l-1} h_i \cos 2\pi f i\Delta,$$

где $G_1(f)$ — частотная характеристика фильтра СС, $G_2(f)$ — частотная характеристика фильтра ССТ.

Частотные характеристики для параметра $l = 10$ приведены на рис. 1. Частотная характеристика фильтра СС оказалась с существенно большей амплитудой осцилляций, что искажает спектр исследуемых частот. На рис. 2 для различных параметров l приведены частотные характеристики фильтра ССТ, по которым можно примерно выбрать l для исследования нужного участка спектра.

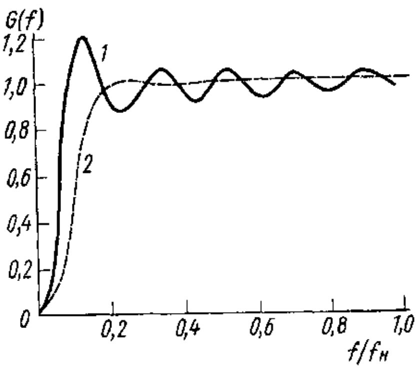

Рис. 1. Частотные характеристики фильтров «скользящее среднее» (1) и «скользящее среднее с косинус-ядром Тьюки» (2) для параметра $l = 10$

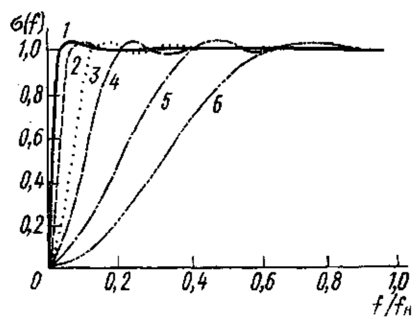

Рис. 2. Частотная характеристика фильтра «скользящее среднее с косинус-ядром Тьюки» для различных l: $l = 60$ (1), 30 (2), 15 (3), 10 (4), 5 (5) и 3 (6)

Однако для работы с фильтром надо знать частоты, когда $G(f) = 0{,}5$; $G(f) = 0{,}7$ и частоту, начиная с которой $G(f) = 1$. Покажем, что для любого l

$$f_{0,5} = f_N / l,$$

где $f_{0,5}$ частота такая, что $G(f_{0,5})=0{,}5$. Используя выражение для $G_2(f)$, запишем:

$$G(f)=1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l-1}\left(1+\cos\frac{\pi i}{l}\right)\cos 2\pi f i\Delta.$$

При

$$f=f_{0,5}=f_N/l,$$

$$G(f_{0,5})=1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l-1}\left(1+\cos\frac{\pi i}{l}\right)\cos\frac{\pi i}{l}=$$

$$=1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l-1}\cos\frac{\pi i}{l}-\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{l-1}\left(1+\cos\frac{2\pi i}{l}\right).$$

Для четного l, очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{l-1}\cos\frac{\pi i}{l}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{l-1}\cos\frac{2\pi i}{l}=-1.$$

Таким образом, для четного l имеем

$$G(f_{0,5})=1-1/l-(l-1)/(2l)+1/2l=1/2.$$

Докажем это для l нечетного. Очевидно, что

$$G(f_{0,5})=1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l-1}\left(1+\cos\frac{\pi i}{l}\right)\cos\frac{\pi i}{l}=$$

$$=1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left(1+\cos\frac{\pi i}{l}\right)\cos\frac{\pi i}{l}=$$

$$=1-\frac{1}{l}-\frac{1}{l}\sum\cos\frac{\pi i}{l}-\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi i}{l}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{l}+\frac{1}{l}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{l}\cos\frac{2\pi i}{l}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{l}\cos\frac{2\pi i}{l}.$$

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{l}\cos\frac{2\pi i}{l}=0.$$

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{l}\cos\frac{2\pi i}{l}=-\sum_{i=1}^{l}\cos\left(\frac{2\pi i}{l}+\frac{\pi}{l}\right),$$

так как в этом случае все члены первой суммы заменяются на такие же, но с противоположным знаком во второй сумме.

Далее,

$$\sum_{i=1}^{l}\left[\cos\frac{2\pi i}{l}+\cos\left(\frac{2\pi i}{l}+\frac{\pi}{l}\right)\right]=0,$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{l}\cos\left(\frac{2\pi i}{l}+\frac{\pi}{2l}\right)=0,$$

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{l}\cos\frac{2\pi i}{l}\right)\cos\frac{\pi}{2l}-\sin\frac{\pi}{2l}\left(\sum_{i=1}^{l}\sin\frac{2\pi i}{l}\right)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sin\frac{2\pi i}{l}=0,$$

так как здесь все члены имеют равные себе по модулю и противоположные по знаку значения, т. е. попарно уничтожаются. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{l}\cos\frac{2\pi i}{l}=0 \text{ и } G(f_{0,5})=\frac{1}{2}.$$

Путем аналогичных рассуждений можно показать, что

$$f_1=2f_N/l,$$

где f_1 — частота, начиная с которой $G(f)=1$. Что касается $f_{0,7}$ (т. е. частоты, когда $G(f)=0{,}7$), то

$$f_{0,7}\approx(1{,}25/l)f_N.$$

Эти соотношения наводят на мысль, что все характеристики фильтра ССТ «подобны» с параметром «подобия» f_N/l. Действительно, рис. 2 показывает, что все характеристики имеют близкие или одинаковые величины, если совпадают соответствующие им параметры f_N/l. Таким образом, вообще говоря, можно было бы рассчитать одну частотную характеристику для большого l, а остальные получить из нее.

Подобие частотных характеристик дает возможность сравнивать результаты (спектры, дисперсии и т. д.), если исходные процессы преобразованы в дискретные ряды с различным шагом. Действительно, различная дискретность дает различные значения f_N, а выбирая l так, чтобы

$$f_{N_1}/l_1\approx f_{N_2}/l_2,$$

получаем практически одинаковые частотные характеристики фильтра в пределах до меньшей f_N.

Анализ выбора оптимальной (для данных конкретных условий) точки отсечения M корреляционной кривой опирался на результаты работ [1, 2] и исходил из двух альтернативных условий: чем меньше M, тем у́же доверительные интервалы для данной спектральной оценки; с другой стороны, чем больше M, тем меньше степень искажения.

Практически в заданном диапазоне частот и длины реализации компромиссный выбор значения точки отсечения при планировании спектрального анализа можно сделать следующим образом. Если сделать предположение о ширине d самой узкой детали спектра или, наоборот, требуется «обнаружить» деталь спектра шириной не меньше d, то точку отсечения M нужно выбрать так, чтобы ширина полосы частот окна $b=b_1/L\Delta$ была меньше d, где $L\Delta=M$, Δ — шаг дискретности, L — количество значений дискретной корреляционной функции, которые нужно сосчитать. Для окна Тьюки $b_1=1{,}33$.

В программе статистического анализа пульсаций скорости руслового потока для высокочастотной фильтрации применялся фильтр ССТ. Для примера счета по описанной выше методике были обработаны ряды значений яркости переменной звезды для 600 последовательных суток, проанализированные в работе [4] методом периодограммы. На рис. 3 приведена периодограмма значений яркости η перемен-

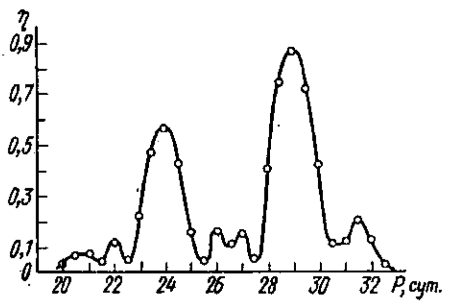

Рис. 3. Периодограмма значений яркости η переменной звезды для 600 последовательных суток

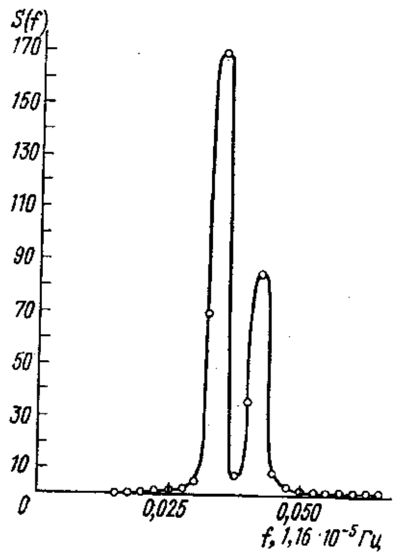

Рис. 4. Спектр значений яркости переменной звезды для 600 последовательных суток с параметрами фильтра $l=30$ и $M=350$

ной звезды для 600 последовательных суток, по которой можно сделать вывод, что изменения η протекают с частотами $f_1=0{,}035\cdot 1{,}16\cdot 10^{-5}$ Гц и $f_2=0{,}042\cdot 1{,}16\cdot 10^{-5}$ Гц. Остальные же максимумы на периодограмме, амплитуда которых существенно меньше основных, оказались ложными (т. е. являются ошибками данной методики счета). Таким образом, задавая ширину $d=0{,}004$ Гц самой узкой детали спектра, M выбираем из условия $M>b_1/b$; l выбираем так, чтобы начиная с частоты $f_1=0{,}03$ Гц частотная характеристика фильтра равнялась единице, т. е. $l=f_N/f_1$. На рис. 4 показан спектр значений яркости переменной звезды, взятых из работы [4], с параметрами фильтра $l=30$ и $M=350$. Спектр имеет два максимума, приходящиеся на те же частоты, которые были получены методом периодограммы. Надо отметить, что при правильном выборе параметров фильтра ложных пиков в спектре не наблюдается. Таким образом, предложенный метод позволяет получить истинные значения спектра изучаемого процесса в заданном диапазоне частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Михайлова Н. А., Харченко И. П. Лабораторные и натурные исследования турбулентности русловых потоков в низкочастотной области спектра. Деп.

ВИНИТИ, № 1313—76 Деп. [2] Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1972, т. 1. [3] Лаворко В. С. Канд. дис. М.: МГУ, 1969. [4] Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. Л.-М.: ГТТИ, 1933.

Поступила в редакцию
05.03.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1983, Т. 24, № 2

УДК 551.482.214.51

МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИИ РАСТВОРЕННОГО КИСЛОРОДА ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ ВЕРХНЕГО СЛОЯ ВОДОЕМА

В. В. Алексеев, Ю. И. Горбатов, А. Ю. Лоскутов

(кафедра физики моря и вод суши)

В работе [1] нами была построена модель кислородного режима пресного водоема при летнем нагреве. В настоящей работе делается попытка моделирования температурного и кислородного режима водоема при осеннем выхолаживании с учетом конвективного перемешивания.

Изучение динамики вертикального распределения температуры и концентрации кислорода при выхолаживании водоема сверху было

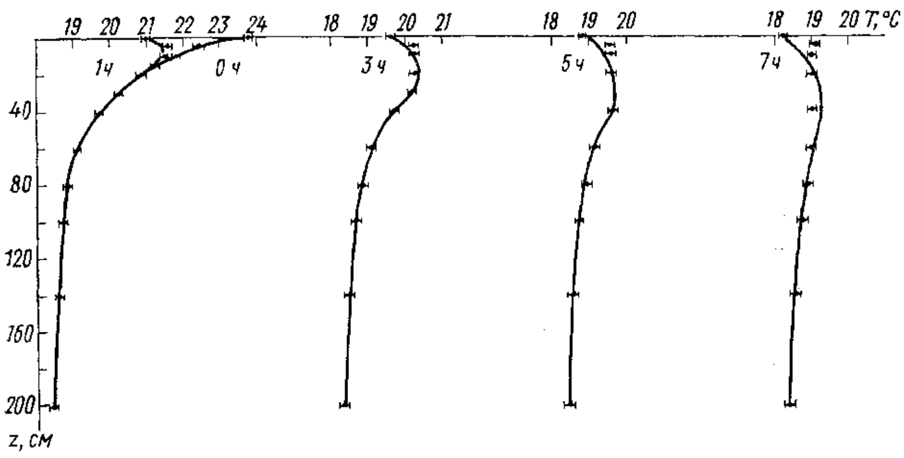

Рис. 1. Сравнение теоретических профилей температуры воды (кривые) с экспериментальными данными (точки). Время указано в часах после начала выхолаживания

проведено на экспериментальной установке, подробно описанной в работе [1]. Вода в бассейне была устойчиво стратифицирована, причем температура поверхностного слоя воды составляла 23,8° С, а придонного слоя — 18,5° С. Температура воды измерялась на 18 фиксированных горизонтах платиновыми термометрами сопротивления и регистрировалась самописцами КСМ-4. Точность измерения ±0,1° С. Концентрация растворенного кислорода в поверхностном слое составляла 8,5 мг/л, на глубине 60 см достигала 11,3 мг/л и оставалась такой же до дна бассейна. Концентрация кислорода измерялась на 12 фиксированных горизонтах торцевыми мембранными оксиметрами и регистрировалась самописцем КСП-4. Точность измерения 0,2 мг/л.