Этот подход справедлив, однако, лишь при условии, что наблюдаемый порог E_c расположен достаточно далеко за пределами слоя энергий шириной порядка $\bar{E}$ около дна затравочной зоны. При $E_c \leqslant \bar{E}$ соотношением (3) пользоваться нельзя, и нужна дополнительная информация, которая позволила бы найти постоянную интегрирования L_0 и связать g_0 с энергией. Можно ожидать, что именно в таких условиях, когда E_c лежит в области, к которой и относились известные соображения Мотта относительно минимальной металлической проводимости, мы сможем получить значения предэкспоненциального множителя проводимости, близкие к $\sigma_{\min}$.

Если исходная зона — узкая, то, вообще говоря, имеется два порога подвижности. В условиях, близких к критическим, оба они попадают в окрестность середины зоны, и во всей области энергий, дающей вклад в интеграл (16), рассеяние является сильным, как и в модели Андерсона в окрестности порога. При этом может быть получена активационная зависимость проводимости (17) с предэкспоненциальным множителем, близким к $\sigma_{\min}$. Этот случай может соответствовать экспериментам [2, 3], в которых активация связывалась с забросом носителей в область края подвижности вблизи середины примесной зоны.

Таким образом, вывод масштабной теории локализации о том, что в бесконечной двумерной системе все состояния локализованы, не противоречит результатам экспериментов по исследованию порога подвижности в двумерных системах. Размытый порог подвижности в двумерных системах может отвечать энергии, разделяющей «асимптотическую область» и ту область энергий, в которой выход на асимптотику больших L не успевает произойти.

В заключение выражаю благодарность В. Л. Бонч-Бруевичу и А. Г. Миронову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Abrahams E. et al. Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, p. 673. [2] Mott N. F. et al. Proc. Roy. Soc. A, 1975, **345**, p. 189. [3] Pepper M. Proc. Roy. Soc. A, 1977, **353**, p. 225. [4] Licciardello D. C., Thouless D. J. J. Phys. C, 1975, **8**, p. 4157. [5] Kaveh M., Mott N. F. J. Phys. C, 1981, **14**, p. L183. [6] Dolan C. J., Osheroff D. D. Phys. Rev. Lett., 1979, **43**, p. 721. [7] Bishop D. J., Tsui D. C., Dynes R. C. Phys. Rev. Lett., 1980, **44**, p. 1153. [8] Pepper M. J. de Physique, 1981, **42**, suppl. au N 10, p. C4—17. [9] Davies R. A., Uren M. J., Pepper M. J. Phys. C, 1981, **14**, p. L531. [10] Altshuler B. L., Aronov A. G., Lee P. A. Phys. Rev. Lett., 1980, **44**, p. 1288.

Поступила в редакцию
24.03.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1983. Т. 24, № 2

УДК 517.91.94

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Шишкин, Г. Б. Гуров

(кафедра математики)

В теории полупроводниковых приборов встречается система уравнений:

$$\mu^2 \dot{y} = x_1 - x_2 + N(t);\quad \dot{x}_1 = x_1 y - R_1;\quad \dot{x}_2 = -x_2 y + R_2, \qquad (1)$$

$t \in [-\beta, 1]$, где $\beta > 0$, описывающая в некотором приближении контакт двух полупроводников с различными типами проводимости [1]. Здесь y, x_1, x_2 — соответственно приведенные напряженность электрического поля, концентрации дырок и электронов; R_1, R_2 — приведенные силы токов; $N(t)$ описывает распределение примесей; t — приведенная пространственная координата; точкой обозначено дифференцирование по t. Параметр $\mu^2 \sim l^2/L^2$, где L — характерный размер образца, l — характерный размер области пространственного заряда — изменяется в различных классах задач от 10^{-8} до 10^{-3}.

Ниже исследованы различные краевые задачи для системы (1), связанные с особенностями процессов, происходящих в образце.

Заменой переменных:

$$z = \mu^k \frac{d^p y}{dt^p}; \; u = x_1 + x_2; \; v = x_1 - x_2, \tag{2}$$

где k, p — целые неотрицательные числа, соответствующим образом подобранные, система (1) приводится к сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений условно устойчивого типа [2, 3].

Решение такой системы ищется в виде ряда по степеням μ^m [2]:

$$x(t, \mu) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\mu^m)^k \left[\bar{x}_k \left(\dfrac{t}{\beta} \right) + \Pi_k x(\tau_0) + Q_k x(\tau_1) \right], t \in [-\beta; 0], \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\mu^m)^k [\bar{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau_2) + Q_k x(\tau_3)], \; t \in [0; 1], \end{cases} \tag{3}$$

где $\tau_0 = (t/\beta + 1)/\mu^i$; $\tau_1 = t/(\beta\mu^i)$, $\tau_2 = t/\mu^j$, $\tau_3 = (t-1)/\mu^j$; x — совокупность переменных z, v, u; m, i, j — соответствующим образом подобранные натуральные числа; $\bar{x}_k$ — регулярные члены разложения; $\Pi_k x$, $Q_k x$ — пограничные члены разложения. Если $x_n(t, \mu)$ — n-я частичная сумма ряда (3), то при выполнении определенных условий [2, 3] $x_n(t, \mu)$ — равномерное по $t \in [-\beta, 1]$ асимптотическое приближение решения соответствующей краевой задачи с точностью $O(\mu^{mn})$.

1. **Симметричный случай. Нормальные токи.** Для симметричного случая, когда $\beta = 1$, $R_1 = R_2$, $N(t)$ — нечетная функция, $x_1(1) = x_2(-1)$, $x_1(-1) = x_2(1)$, очевидно, можно ограничиться рассмотрением отрезка $[0; 1]$. При малых токах ставятся краевые условия:

$$x_1(0) = x_2(0); \quad x_1(1) = 0; \quad x_2(1) = N. \tag{4}$$

Пусть, кроме того, $R_1 = R_2 = C \sim 1$; $N(t) = Nt$, где C, N — заданные положительные постоянные. Заменой (2) при $k = p = 1$ задача (1), (4) приводится к равносильной ей задаче [1]:

$$\mu \dot{z} = uy - 2C + N; \mu \dot{y} = z; \dot{u} = vy; \dot{y} = uy - 2C, \tag{5}$$

$$z(0) = 0; \quad u(1) = N; \quad z(1) = 0; \quad v(1) = -N. \tag{6}$$

Решение (5), (6) ищется в виде ряда (3) при $m = i = j = 1$. Для членов ряда (3) получены явные выражения, в том числе:

$$\bar{v}_0(t) = -N(t); \quad \bar{z}_0(t) = 0; \quad \bar{u}_0(t) = \sqrt{Nt^2(N - 2C) + 2CN},$$

$$\bar{y}_0(t) = \frac{2C - N}{\sqrt{Nt^2(N - 2C + 2CN)}}; \; \Pi_0 u = \Pi_0 v = \Pi_0 z = \Pi_0 y =$$

$$= Q_0 y = Q_0 v = Q_0 u = Q_0 z = \Pi_1 u = \Pi_1 v = Q_1 u = Q_1 v =$$

$$= \Pi_1 y = \Pi_1 z \equiv 0;\ \bar{u}_1(t) = \bar{v}_1(t) = \bar{y}_1(t) \equiv 0; \tag{7}$$

$$\bar{z}_1(t) = \frac{N(N-2C)^2 t}{(Nt^2(N-2C)+2CN)^{3/2}};\ Q_1 y(\tau_3) = -\frac{(N-2C)^3}{N^{5/2}} e^{\sqrt{N}\,\tau_3};$$

$$Q_1 z(\tau_3) = -\frac{(N-2C)}{N^2} e^{\sqrt{N}\,\tau_3}.$$

2. **Симметричный случай. Большие токи.** В случаях больших токов для системы (1) ставятся краевые условия:

$$x_1(0) = x_2(0);\quad x_1(1) = 0;\quad x_2(1) = Na. \tag{8}$$

Пусть, кроме того, $R_1 = R_2 = \frac{C}{\mu^2} \sim \frac{1}{\mu^2}$; $N(t) = \begin{cases} Nt, & t \leqslant a \\ Na, & t \geqslant a \end{cases}$,

где $a \in (0;\ 1]$; C, N, a — заданные положительные величины. Заменой (2) при $k=2$, $p=0$ задача (1), (8) сводится к задаче

$$\dot{z} = v + N(t);\ \mu^2 \dot{u} = vz;\ \mu^2 \dot{v} = uz - 2C, \tag{9}$$

$$v(0) = 0;\quad u(1) = Na;\quad v(1) = -Na. \tag{10}$$

Задачу (9), (10) можно отнести к условно устойчивому случаю, если справедливо неравенство $C/(Na) - Na + Na^2/2 > 0$. Тогда решение задачи (9), (10) ищется в виде ряда (3) при $m = i = j = 2$. Для членов ряда (3) получены явные выражения, в том числе

$$\bar{v}_0(t) = \Pi_0 z = Q_0 z = \Pi_0 u = \Pi_0 v = \Pi_1 z = \Pi_1 u = \Pi_1 v \equiv 0;$$

$$\bar{z}_0(t) = \begin{cases} \alpha_0 + \frac{1}{2} Nt^2; & t \leqslant a; \\ \alpha_0 + \frac{1}{2} Na^2 + Na(t-a), & t \geqslant a; \end{cases} \qquad \bar{u}_0(t) = \frac{2C}{\bar{z}_0(t)}, \tag{11}$$

$$Q_0 u(\tau_3) = Q_0 v(\tau_3) = -Na e^{\bar{z}_0(1)\tau_3};\ \bar{z}_1(t) = \frac{C}{\bar{z}_0^2(t)} + \frac{(Na)^2}{2C};$$

$$\bar{u}_1(t) = \frac{-2C\bar{z}_1(t)}{\bar{z}_0^2(t)};\quad \bar{v}_1(t) = \frac{-2CN(t)}{\bar{z}_0^3(t)};$$

$$Q_1 z(\tau_3) = -\frac{Na}{\bar{z}_0(1)} e^{\bar{z}_0(1)\tau_3};$$

$$Q_1 u(\tau_3) = -\bar{u}_1(1) e^{\bar{z}_0(1)\tau_3} - \left(\frac{(Na)^2}{\bar{z}_0(1)} - \bar{z}_1(1) Na\right) \tau_3 e^{\bar{z}_0(1)\tau_3};$$

$$Q_1 v(\tau_3) = Q_1 u(\tau_3) - \frac{(Na)^2}{\bar{z}_0^2(1)} e^{\bar{z}_0(1)\tau_3};$$

$$\alpha_0 = \frac{C}{Na} - Na + \frac{1}{2} Na^2.$$

3. **Несимметричный случай. Большие токи.** При $\beta = \mu$ ставятся краевые условия:

$$x_1(-\mu) = N;\ x_2(-\mu) = 0;\ x_2(1) = 0;\ x_2(1) = 1. \tag{12}$$

Пусть, кроме того,

$$R_1 = C_1/\mu^2;\quad R_2 = C_2/\mu^2;\quad C_1 + C_2 = 1;\quad C_1,\ C_2 \sim 1;$$

$$N(t) = \begin{cases} -N, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Здесь N — заданная положительная постоянная; C_1, C_2 — неизвестные положительные постоянные.

Заменой (2) при $k=2$, $p=0$ задача (1), (12) сводится к задаче

$$\dot{z} = v + N(t);\ \mu^2\dot{u} = vz - r;\ \mu^2\dot{v} = uz - 1; \tag{13}$$

$$v(-\mu) = N;\ u(-\mu) = N;\ v(1) = -1;\ u(1) = 1, \tag{14}$$

где

$$r = C_1 - C_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i r_i,$$

причем r_i подлежат определению. Решение (13) ищется в виде ряда (3) при $i=m=1$, $j=2$, при этом задача решается отдельно на отрезках $[-\mu, 0]$ и $[0;\ 1]$ при краевых условиях

$$z(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \alpha_i;\ u(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i u^{(i)};\ v(-\mu) = N;$$

$$z(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \alpha_i;\ u(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i u^{(i)};\ v(1) = -1$$

соответственно, а затем полученные решения сшиваются по непрерывности в точке $t=0$, тем самым неизвестные параметры α_i, $u^{(i)}$, r_i находятся из системы уравнений

$$u(-\mu) = N;\quad u(1) = 1;\quad v_{\text{лев}}(0) = v_{\text{прав}}(0). \tag{15}$$

Система (15) имеет единственное решение при любом N. Для членов ряда (3) получены явные выражения, в том числе

а) $-\mu \leqslant t \leqslant 0$, тогда

$$\bar{z}_0(t/\mu) = \alpha_0; \bar{v}_0(t/\mu) = r_0/\alpha_0;\ \bar{u}_0(t/\mu) = 1/\alpha_0;$$

$$\Pi_0 z = Q_0 z = Q_0 u = Q_0 v = \Pi_1 z = Q_1 z \equiv 0;$$

$$Q_1 u = Q_1 v \equiv 0;$$

$$\bar{v}_1\left(\frac{t}{\mu}\right) = \frac{1}{\alpha_0}\left\{r_1 - \frac{r_0}{\alpha_0}\left[\left(\frac{r_0}{\alpha_0} - N\right)\frac{t}{\mu} + \alpha_1\right]\right\}; \tag{16}$$

$$\bar{z}_1\left(\frac{t}{\mu}\right) = \left(\frac{r_0}{\alpha_0} - N\right)\frac{t}{\mu} + \alpha_1;$$

$$\bar{u}_1\left(\frac{t}{\mu}\right) = -\frac{1}{\alpha_0^2}\left[\left(\frac{r_0}{\alpha_0} - N\right)\frac{t}{\mu} + \alpha_1\right].$$

$$\Pi_1 v(\tau_0) = -\Pi_1 u(\tau_0) = -\bar{v}_1(-1)\, e^{-\alpha_0\tau_0} +$$
$$+ [N - r_0/\alpha_0 + \alpha_1]\, \tau_0 (N - r_0/\alpha_0)\, e^{-\alpha_0\tau_0};$$

б) $0 \leqslant t \leqslant 1$, тогда $\bar{z}_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{z}_0 + r_0 = (\alpha_0 + r_0)\, e^{-\alpha_0/r_0}\, e^{(\bar{z}_0 - t)/r_0}. \tag{17}$$

Уравнение (17) при α_0, r_0, определенных из (15), имеет единственное решение на $[0;\ 1]$, причем $\bar{z}_0(t) > 0$ при $t \in [0;\ 1]$,

$$\bar{v}_0(t) = r_0/\bar{z}_0(t);\ \bar{u}_0(t) = 1/\bar{z}_0(t);\ \Pi_0 z = Q_0 z = \Pi_0 u =$$
$$= \Pi_0 v = \Pi_1 z = Q_1 z = \Pi_1 u = \Pi_1 v = 0;$$

$$\bar{z}_1(t)=\{C+r_1\ln(\bar{z}_0(t)+r_0)+r_1r_0/[r_0+\bar{z}_0(t)]\}\frac{r_0+\bar{z}_0(t)}{\bar{z}_0(t)},$$

где C определяется из условия $\bar{z}_1(0)=\alpha_1$;

$$\bar{v}_1=\frac{1}{\bar{z}_0(t)}\left\{r_1-r_0\frac{\bar{z}_1(t)}{\bar{z}_0(t)}\right\}; \tag{18}$$

$$\bar{u}_1=-\frac{\bar{z}_1(t)}{\bar{z}_0^2(t)};\ Q_0u(\tau_3)=Q_0v(\tau_3)=\left(-1-\frac{r_0}{\bar{z}_0(1)}\right)e^{\bar{z}_0(1)\tau_3},$$

$$Q_1u(\tau_3)=Q_1v(\tau_3)=-\bar{v}_1(1)e^{\bar{z}_0(1)\tau_3}+\bar{z}_1(1)\left(-1-\frac{r_0}{\bar{z}_0(1)}\right)e^{\bar{z}_0(1)\tau_3}\cdot\tau_3.$$

Константа r_0, таким образом, определяется из уравнения

$$\frac{1+r_0}{2}=\left(\frac{1+r_0}{2N}+r_0\right)e^{-\frac{1+r_0}{2r_0}\cdot\frac{N+1}{N}}. \tag{19}$$

Уравнение (19) имеет единственное решение в интервале (—1; 1) при любом $N>0$, причем $-1/(1+2N)<r_0<0$,

$$\alpha_0=(1+r_0)/(2N);\ \bar{z}_0(1)=(1-r_0)/2;\ u^{(0)}=2N/(1+r_0). \tag{20}$$

Константы α_1, r_1 определяются из системы уравнений:

$$\begin{gathered}r_1+2\bar{z}_1(1)=0;\\ \alpha_0r_1-\alpha_1(1+r_0)+N(r_0-1)=0,\end{gathered} \tag{21}$$

где $\bar{z}_1(1)$ определяется из (18), а

$$u^{(1)}=\frac{1}{2}[\bar{u}_{1_{\text{прав}}}(0)+\bar{u}_{1_{\text{лев}}}(0)].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Васильева А. Б., Стельмах В. Г. ЖВМ и МФ, 1977, **17**, № 2, с. 340. [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. [3] Есипова В. А. Дифференц. ур-ния, 1975, **11**, № 11, с. 1956.

Поступила в редакцию
12.04.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1983, Т. 24, № 2

УДК 538.3:530.145

О РЕГИСТРАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Б. А. Гришанин, В. Н. Руденко

(кафедра физики колебаний)

1. Введение. Прогресс техники физического эксперимента в последние годы, с одной стороны, сделал реальной задачу наблюдения квантовых особенностей поведения макроскопических систем [1, 2], а с другой — поставил вопрос об учете квантовых ограничений чувствительности в реальном макроскопическом эксперименте [3—7] и практической реализации потенциальных пределов качества, даваемых квантовой теорией оптимальной фильтрации [8, 9].