

$$\bar{z}_1(t) = \left\{ C + r_1 \ln(\bar{z}_0(t) + r_0) + r_1 r_0 / [r_0 + \bar{z}_0(t)] \right\} \frac{r_0 + \bar{z}_0(t)}{\bar{z}_0(t)},$$

где C определяется из условия $\bar{z}_1(0) = \alpha_1$;

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\bar{z}_0(t)} \left\{ r_1 - r_0 \frac{\bar{z}_1(t)}{\bar{z}_0(t)} \right\}; \quad (18)$$

$$\bar{u}_1 = -\frac{\bar{z}_1(t)}{\bar{z}_0^2(t)}; \quad Q_0 u(\tau_3) = Q_0 v(\tau_3) = \left(-1 - \frac{r_0}{\bar{z}_0(1)} \right) e^{\bar{z}_0(1)\tau_3},$$

$$Q_1 u(\tau_3) = Q_1 v(\tau_3) = -\bar{v}_1(1) e^{\bar{z}_0(1)\tau_3} + \bar{z}_1(1) \left(-1 - \frac{r_0}{\bar{z}_0(1)} \right) e^{\bar{z}_0(1)\tau_3} \cdot \tau_3.$$

Константа r_0 , таким образом, определяется из уравнения

$$\frac{1+r_0}{2} = \left(\frac{1+r_0}{2N} + r_0 \right) e^{-\frac{1+r_0}{2r_0} \cdot \frac{N+1}{N}}. \quad (19)$$

Уравнение (19) имеет единственное решение в интервале $(-1; 1)$ при любом $N > 0$, причем $-1/(1+2N) < r_0 < 0$,

$$\alpha_0 = (1+r_0)/(2N); \quad \bar{z}_0(1) = (1-r_0)/2; \quad u^{(0)} = 2N/(1+r_0). \quad (20)$$

Константы α_1, r_1 определяются из системы уравнений:

$$r_1 + 2\bar{z}_1(1) = 0; \quad (21)$$

$$\alpha_0 r_1 - \alpha_1 (1+r_0) + N(r_0-1) = 0,$$

где $\bar{z}_1(1)$ определяется из (18), а

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} [\bar{u}_{1\text{прав}}(0) + \bar{u}_{1\text{лев}}(0)].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А. Б., Стельмах В. Г. ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 2, с. 340.
 [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. [3] Есипова В. А. Дифференц. ур-ния, 1975, 11, № 11, с. 1956.

Поступила в редакцию
12.04.82

УДК 538.3:530.145

О РЕГИСТРАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Б. А. Гришанин, В. Н. Руденко

(кафедра физики колебаний)

1. Введение. Прогресс техники физического эксперимента в последние годы, с одной стороны, сделал реальной задачу наблюдения квантовых особенностей поведения макроскопических систем [1, 2], а с другой — поставил вопрос об учете квантовых ограничений чувствительности в реальном макроскопическом эксперименте [3—7] и практической реализации потенциальных пределов качества, даваемых квантовой теорией оптимальной фильтрации [8, 9].

Цель данной статьи состоит в квантовом анализе конкретной измерительной схемы, содержащей пробный осциллятор и регистрирующий элемент (преобразователь с усилением сигнала), с точки зрения реализации процедуры «разностного звена» [7] апостериорно — по записи, которую осуществляет регистрирующая система (датчик). Фактически измерение разностного оператора $\hat{Y}(t, \tau)$ есть квазиоптимальное воплощение истинно оптимального квантового алгоритма фильтрации [8, 9]. Квантовые флуктуации регистрирующего элемента ограничивают эффективность реального воплощения оптимального алгоритма на некотором уровне, отыскание которого также входит в задачу проводимых ниже вычислений. Отметим, что наличие в измерительной схеме дополнительных степеней свободы, относящихся к датчику, соответствует теоретическому представлению о «косвенном измерении» [10—12].

2. Квантовый сигнал RC-датчика механических колебаний гармонического осциллятора. В проблематике предельно чувствительных измерений на уровне квантовых эффектов [1—7] анализ схем, содержащих диссипативные элементы, связан с определенными осложнениями общетеоретического характера. А именно: непосредственное применение исходного гамильтоновского формализма квантовой механики в этой ситуации невозможно из-за затухания, наличие которого означает незамкнутый характер рассматриваемой на квантовом уровне макроскопической подсистемы и необходимость учета ее взаимодействия с микроскопической подсистемой, ответственной за затухание. Для линейных систем простой рецепт, позволяющий непротиворечиво описать динамику квантовой макросистемы, состоит во введении квантовых источников шума, вычисляемого по квантовой теореме Найквиста [13—17].

Этот естественный подход мы здесь используем для анализа информационных характеристик RC-датчика без рассмотрения ограничений на последующую схему обработки, т. е. для выявления потенциальных возможностей любых схем с RC-датчиком. Эти возможности естественно сравнить с характеристиками, полученными без фиксации датчика, но при ограничении, вносимом процедурами измерения, лишенными спектральной окраски [3].

Напомним эти последние результаты, относящиеся к фильтрации полезного сигнала из квантового шума одиночного осциллятора. Пусть перед измерением осциллятор находился в некотором, в общем случае возбужденном состоянии, таком, что

$$\sigma_x^2 = \left\langle n + \frac{1}{2} \right\rangle \hbar / m\omega_0. \quad (1)$$

Для короткого резонансного цуга внешней силы длительности $\hat{\tau}$ приращение координаты осциллятора равно $\Delta x = F_0 \hat{\tau} / 2m\omega_0$. Простейший алгоритм обнаружения, состоящий в сравнении Δx и σ_x , дает для регистрируемой амплитуды

$$F_{0\min} \geq \left(\left\langle n + \frac{1}{2} \right\rangle m\hbar\omega_0 \right)^{1/2} / \hat{\tau}. \quad (2)$$

Применение же алгоритма оптимальной фильтрации, связанного с «исключением из наблюдения» спектральных компонент (сигнальных и шумовых) на частоте ω_0 и квазиоптимально отвечающего измерению разностного оператора $\hat{Y} = \hat{X}(t+\tau) - \hat{X}(t)$, приводит в принципе к

неограниченной чувствительности, именно [7]:

$$F_{0 \min} \geq \min_{\gamma} \left(\left\langle n + \frac{1}{2} \right\rangle m \hbar \omega_0 \right)^{1/2} (2\gamma/\tau)^{1/2}. \quad (3)$$

Действительно, $F_{0 \min} \rightarrow 0$ при $\gamma/\tau \rightarrow 0$; γ^{-1} — время релаксации осциллятора. Как мы убедимся в результате соответствующих расчетов, использование RC -датчика с нулевой эффективной температурой и последующей оптимальной фильтрацией дает результат, промежуточный между (2) и (3).

Схема датчика представлена на рис. 1.

Изменение емкости за счет смещения механического осциллятора приводит к соответствующему току через сопротивление и возникновению на выходе цепи электрического напряжения \hat{v} .

Уравнения движения для операторов физических величин рассматриваемой квантовой системы с учетом найквистовского квантового шумового напряжения $\hat{\eta}(t)$ на сопротивлении R имеют вид:

$$\begin{aligned} d\hat{Q}/dt &= \hat{P}/m, \\ d\hat{P}/dt &= -m\omega_0^2 \hat{Q} + \hat{C}\hat{V}^2/2(d - \hat{Q}) + f(t), \\ d(\hat{C}\hat{V})/dt &= (\mathcal{E} - \hat{V})/R + \hat{\eta}(t)/R. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \hat{Q} , \hat{P} — канонические координаты и импульс для осциллятора; \hat{C} — оператор емкости, определяемый соотношением

$$\hat{C} = C_0 d / (d - \hat{Q}); \quad \hat{V} = \mathcal{E} + \hat{v};$$

$f(t)$ — классическая внешняя сила.

Линеаризация уравнений (1) по малым безразмерным параметрам \hat{Q}/d , \hat{v}/\mathcal{E} дает линейную систему, которая с использованием матричных обозначений принимает вид

$$d\hat{X}/dt = A\hat{X} + \hat{F}(t). \quad (5)$$

Здесь $\hat{X}(t)$ — вектор-столбец искоемых переменных \hat{Q} , \hat{P} , \hat{v} ;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} & 0 \\ -m\omega_0^2(1 - \chi) & 0 & C_0\mathcal{E}/d \\ 0 & -\mathcal{E}/md & -1/\tau_0 \end{pmatrix};$$

$\tau_0 = RC_0$, $\chi = C_0\mathcal{E}^2/m\omega_0^2d^2$ — безразмерный параметр электромеханической связи. Эволюционная матрица A описывает как осцилляторную степень свободы совокупной системы, так и неполную чисто релаксационную степень, отвечающую собственно RC -датчику;

$$\hat{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \\ \eta(t)/\tau_0 \end{pmatrix} -$$

вектор внешних по отношению к макросистеме сил.

Решение уравнения (5)

$$\hat{X}(t) = e^{At} \hat{X}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \hat{F}(\tau) d\tau \quad (6)$$

после упрощений с учетом условий $\tau_0 \ll t$, $\exp(\lambda_3 t) \ll 1$, $|\lambda_3 \tau_0| \sim 1$ приводится к виду:

$$\begin{aligned} \widehat{v}(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle 1 |_2 \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} f(\tau) d\tau + [\langle 1 |_1 \widehat{Q}(0) + \langle 1 |_2 \widehat{P}(0)] e^{\lambda_1 t} | 1 \rangle_3 + \right. \\ \left. + \langle 1 |_3 | 1 \rangle_3 \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)} \widehat{\eta}(\tau) d\tau / \tau_0 + \langle 3 |_3 | 3 \rangle_3 \int_0^t e^{\lambda_3(t-\tau)} \widehat{\eta}(\tau) d\tau / \tau_0, \right. \end{aligned} \quad (7)$$

где $|i\rangle$, $\langle j|$ — правые и левые собственные векторы матрицы A , причем $\langle j | i \rangle = \delta_{ij}$.

Таким образом, выходной сигнал имеет структуру

$$\widehat{v}(t) = s(t) + \widehat{\xi}_0(t) + \widehat{\xi}_1(t) + \widehat{\xi}_2(t). \quad (8)$$

Здесь $s(t)$ — полезный сигнал, являющийся линейным откликом на классическую силу и описываемый первым интегралом в (7); $\widehat{\xi}_0(t) = [\langle 1 |_1 | 3 \rangle_3 \widehat{Q}(0) + \langle 1 |_2 | 3 \rangle_3 \widehat{P}(0)] \exp(\lambda_1 t)$ — собственный квантовый шум осциллятора, который из-за взаимодействия с датчиком имеет ненулевое затухание $-\operatorname{Re} \lambda_1$ и частоту $\operatorname{Im} \lambda_1$, не совпадающую в точности ни с ω_0 , ни с $\omega_0 \sqrt{1-\chi}$; $\widehat{\xi}_1(t)$ — определяемый вторым интегралом в (7) нестационарный шум косвенного измерения, компенсирующий затухание собственных квантовых флуктуаций осциллятора: он вносится датчиком взамен собственного шума осциллятора и имеет спектр такой же формы, как и $\widehat{\xi}_0$; $\widehat{\xi}_2(t)$ — определяемый по-

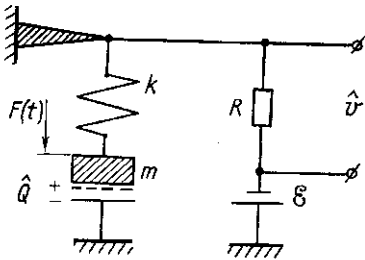


Рис. 1

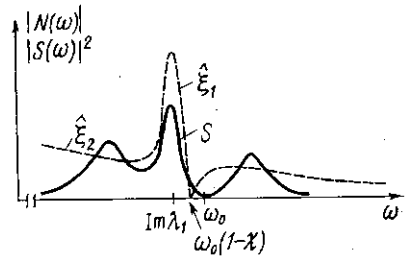


Рис. 2

следним интегралом в (7) широкополосный найквистовский шум датчика, имеющий нулевую центральную частоту $\operatorname{Im} \lambda_3 = 0$ и также проникающий в осцилляторную степень свободы. Спектр $|S(i\omega)|^2$ сигнала $s(t)$ и спектр $N_{\widehat{\xi}_1 + \widehat{\xi}_2}(\omega)$ установившегося шума $\widehat{\xi}_1 + \widehat{\xi}_2$ при $t \rightarrow \infty$ изображены на рис. 2.

Наличие провала в спектре $N_{\widehat{\xi}_1 + \widehat{\xi}_2}$, связанное с эффектом динамического демпфирования флуктуаций электрической степени свободы [15], может быть использовано для улучшения отношения сигнал/шум лишь ценой потери величины сигнала и по этой причине далее не обсуждается.

3. Отношение сигнал/шум на выходе RC-датчика. Для анализа характеристик измерения силы согласно современной математической форме общей теории косвенных измерений [12] достаточно использовать результаты прямого («безредукционного») квантового обобщения [8] классической теории фильтрации. Это связано с тем, что оценка

силы дается единственным соответствующим ей апостериорным квантовомеханическим оператором. Оптимальный алгоритм сводится к линейной фильтрации и определяется стандартными классическими формулами. Отношение сигнал/шум имеет такой же вид, как и в классической теории:

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(i\omega)|^2 / [N_{\xi_1}(\omega) + N_{\xi_2}(\omega)] d\omega. \quad (9)$$

При написании этого выражения в (8) отброшен нестационарный шум $\xi_0(t)$, так как время включения t_0 силы $f(t)$ предполагается таким, что $|\operatorname{Re} \lambda_{1,2}| t_0 \gg 1$, т. е. после подсоединения датчика в момент $t=0$ устанавливается стационарное состояние системы. Поскольку $N_{\xi_1}(\omega)$ имеет острый всплеск в окрестности частоты $\omega = \operatorname{Im} \lambda_1$, это означает, что при оптимальной фильтрации соответствующий зашумленный участок спектра сигнала должен быть отброшен. Однако если длительность сигнала $\hat{\tau}$ такова, что $|\operatorname{Re} \lambda_1| \hat{\tau} \ll 1$ (внесенное датчиком затухание мало), то ширина этого участка незначительна, и при расчете ρ в (9) можно просто положить $N_{\xi_1} = 0$.

Для силы $f(t) = f_0 \cos \omega_0 t$ при $t_0 < t < t_0 + \hat{\tau}$ и $f(t) \equiv 0$ при остальных t (прямоугольный цуг), поскольку ширина спектра $S(i\omega)$ порядка $1/\hat{\tau}$ и значительно меньше $\lambda_3 \sim 1/RC_0$ ($RC_0 \ll \hat{\tau}$), имеем

$$\rho \approx 2 \int_0^{\infty} |S(i\omega)|^2 d\omega / N_{\xi_2}(\omega_0) = \mathcal{E}_s / N.$$

При этом в $S(i\omega)$ мы должны исключить резонансную составляющую в окрестности $\omega = \operatorname{Im} \lambda_1$.

В результате получаем в предположении $\Delta\omega \hat{\tau} \ll 1$, $\delta \hat{\tau} \ll 1$

$$\mathcal{E}_{s \text{эфф}} = \frac{F_0^2}{3} |\langle 1 | {}_2 | 1 \rangle_3|^2 \frac{\delta^2 \Delta\omega^2 + (\delta^2 - \Delta\omega^2)}{(\delta^2 + \Delta\omega^2)^3} \hat{\tau}^3, \quad (10)$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$, $\delta = |\operatorname{Re} \lambda_1|$. Соответственно при малых χ и $\eta = \omega_0 \tau_0$ энергия сигнала в физических единицах равна

$$\mathcal{E}_{s \text{эфф}} / R = \frac{F_0^2 \hat{\tau}^3 \omega_0}{12m} \chi \eta \frac{\eta^4 - \eta^2 + 1}{(\eta^2 + 1)^2} \xrightarrow{\eta \ll 1} F_0^2 \hat{\tau}^3 \chi \omega_0^2 RC_0 / 12m, \quad (11)$$

а отношение сигнал/шум —

$$\rho = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 \hat{\tau}^3}{\hbar m} \chi \eta \frac{\eta^4 - \eta^2 + 1}{(\eta^2 + 1)^2} \xrightarrow{\eta \ll 1} \frac{1}{6} \frac{F_0^2 \hat{\tau}^3}{\hbar m} \chi \omega_0 RC_0. \quad (12)$$

Полученные результаты (11), (12) допускают возможность оптимизации по параметрам схемы — коэффициенту связи χ и постоянной времени $\tau_0 = RC_0$. Для получения оптимальных значений по порядку величины достаточно, не используя точного выражения для сигнала $S(i\omega)$ (или $s(t)$), положить χ и τ_0 равными по порядку величины максимально допустимым значениям, соответствующим $\Delta\omega \hat{\tau} \sim \delta \hat{\tau} \sim 1$, т. е. $\chi \omega_0 \hat{\tau} \sim 1$, $\chi \hat{\tau} / \tau_0 \sim 1$ и, соответственно, $\eta = \omega_0 \tau_0 \sim 1$. В результате $\mathcal{E}_{s \text{opt}} \sim F_0^2 \hat{\tau}^2 / 2m$, $\rho \sim F_0^2 \hat{\tau}^2 / m \hbar \omega_0$. Соответственно, полагая $\rho \sim 1$, получаем в качестве оценки для минимально обнаружимой силы формулу (2) с $n=0$, при этом

$$\mathcal{E}_{s \text{opt}} \sim \hbar \omega_0, \quad F_{0 \text{min}} \sim \left(\frac{\hbar \omega_0 m}{2 \hat{\tau}^2} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

4. **Выводы.** Учет квантового шума регистрирующей системы в виде *РС*-датчика ограничивает чувствительность схемы, изображенной на рис. 1, на уровне, задаваемом формулой (2) с $n=0$ при использовании той же последующей оптимальной процедуры, которая давала бесконечное разрешение в случае чистого одиночного осциллятора (см. (3)). Принимая во внимание возможность существования возбужденных состояний осциллятора с $n \neq 0$ (1), можно сформулировать следующее утверждение: чувствительность к обнаружению внешнего воздействия схемы рис. 1 лежит в интервале

$$\frac{1}{\tau} \left(\left\langle n + \frac{1}{2} \right\rangle m \hbar \omega_0 \right)^{1/2} \geq F_{\min} \geq \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{2} m \hbar \omega_0 \right)^{1/2}.$$

На практике операция отбрасывания узкой части спектра ($\omega_0 \pm \delta_{\text{эфф}}$) могла бы быть с требуемой точностью выполнена апостериорно при спектральном анализе приближенной записи функции $\vartheta(t)$ на интервале наблюдения $T \gg \delta_{\text{эфф}}^{-1}$. Интересно, что для получения квантового предела (13) не потребовалось вводить дополнительные шумы усилителя, на вход которого подается $\vartheta(t)$, так называемые шумы деквантования, диктуемые «теоремой Хефнера» [18]. Оптимальный режим в схеме рис. 1 автоматически отвечает условию превышения энергии сигнала над критическим квантовым порогом $\hbar\omega_0/2$, который обусловлен вакуумным найквистовским шумом, имеющим широкий спектр и перекрывающим в данной схеме всю полосу сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1340. [2] Додонов В. В., Манько В. И., Руденко В. Н. Квант. электроника, 1980, 7, № 10, с. 2124. [3] Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И. УФН, 1974, 114, с. 41. [4] Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. Письма в ЖЭТФ, 1978, 27, с. 296. [5] Thorne K. S. et al. Phys. Rev. Lett., 1978, 40, p. 667. [6] Thorne K. S. et al. Rev. Mod. Phys., 1980, 52, p. 341. [7] Додонов В. В., Манько В. И., Руденко В. Н. ЖЭТФ, 1980, 78, с. 881. [8] Стратонович Р. Л., Гришанин Б. А. Проблемы передачи информации, 1970, 6, № 3, с. 15. [9] Гришанин Б. А. Радиотехн. и электроника, 1973, 18, с. 789. [10] Мандельштам И. Л. Лекции по квантовой механике. Собр. трудов, т. 5. М.: Наука, 1950. [11] Хелстром К., Лиу Дж., Гордон Дж. ТИИЭР, 1970, 58, № 10, с. 150. [12] Гришанин Б. А. Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1973, № 5, с. 127. [13] Хаус Г. ТИИЭР, 1970, 58, № 10, с. 208. [14] Курикша А. А., Курушин А. Д. Радиотехн. и электроника, 1969, 14, с. 1987. [15] Гусев А. В., Руденко В. Н. ЖЭТФ, 1979, 76, с. 1488. [16] Гришанин Б. А. Теор. и матем. физика, 1981, 48, № 3, с. 396. [17] Гришанин Б. А. Квантовая электродинамика для радиофизиков. М.: Изд-во МГУ, 1981. [18] Heeger H. Proc. I. R. E., 1962, 50, p. 1604.

Поступила в редакцию
23.04.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 2

УДК 621.372.6:512.642:512.563.3

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИИ N-ПОЛЮСНИКОВ

В. И. Шестаков

(кафедра общей физики для физического факультета)

§ 1. Вместо обычного термина «многополюсник» (МП), очевидно непригодного, когда число N полюсов МП мало, будем применять термин «N-полюсник» (НП). Бесплюсником или 0-полюсником будем