делить данные [7] на $(w/v)_k=0{,}474$ и $S_k=0{,}6$, а данные авторов на $(w/v)'_k=0{,}0072$ и $S'_k=0{,}849$, то полученные значения ложатся на одну кривую *3* (рис. 2). По-видимому, критические величины являются неизвестными функциями числа Re, угла θ и геометрических размеров вихревых образований. Таким образом, вихри различной природы, имеющие одинаковые приведенные значения параметра S и отношения w/v, могут быть приведены в соответственные состояния.

Для исследованного нами вихря в области значений параметра S от 0,5 до 0,9 (рис. 3, кривая *2*) безразмерная тангенциальная скорость v/v_0 остается постоянной с изменением параметра S и, следовательно, температуры поверхности. Значение скорости v_0 взято при $S=0{,}6$. В [7] для неконвективного вихря не приводится кривой, аналогичной *2*. Для сравнения на рис. 3 показана кривая *3* реального циклона, взятая из [5]. Вихревое отношение нормировано на величину S соответствующей лабораторной модели.

Лазерным анемометром измерялась также интенсивность турбулентных пульсаций в интервале S от 0,5 до 0,9. Оказалось, что поступающая в вихрь энергия идет на интенсивную генерацию турбулентных пульсаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Fitzjarrald D. E. J. Atm. Sci., 1973, **30**, N 5, p. 894. [2] Анисимова Е. П. и др. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1981, **22**, № 3, с. 98 [3] Бодроносов А. В., Соловьев А. А. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1982, **18**, № 3, с. 331. [4] Шулейкин В. В. Расчет развития, движения и затухания тропических ураганов. Л.: Гидрометеоиздат, 1978, с. 23—31. [5] Serra S. C. Geofisica International, 1975, **15**, N 1, p. 65. [6] Баранов П. А., Соловьев А. А. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1980, **16**, № 6, с. 656. [7] Baker G. L., Church C. R. J. Atm. Sci., 1979, **36**, N 12, p. 2413.

Поступила в редакцию
05.05.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 2

УДК 530.145.6

АСИМПТОТИКИ УДЕРЖИВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ И СПЕКТР РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра квантовой теории)

В работах [1—3] методом обратной задачи рассеяния [4, 5] исследована зависимость удерживающих потенциалов центрального поля $V(r)$ $(\lim\limits_{r\to\infty} V(r)=\infty,\ V'(r)>0$ при $r>r_0>0,\ \lim\limits_{r\to 0} r^2V(r)=0)$ от изменений спектральных характеристик (уровней энергии E_{ln} и нормировочных постоянных c_{ln}) радиального уравнения Шредингера (УШ) при фиксированном моменте l и получены асимптотические формулы $(r\to\infty)$ для поправок к потенциалу $\Delta V(r)$ в случаях изменения числа состояний и сдвига уровней энергии в любой конечной области спектра $0<E<E_l^0$.

Покажем, что асимптотики поправок к потенциалу в этих случаях можно получить без использования стандартной техники обратной задачи, связанной с решением интегрального уравнения Гельфанда—Левитана. Для этого воспользуемся квазиклассическим условием квантования [6]:

$$\int\limits_{r_{\min}(E_{ln})}^{r_{\max}(E_{ln})} \{E_{ln} - V_l(r)\}^{1/2}\, dr = \pi(n + \delta_l), \tag{1}$$

где δ_l — некоторое число, $V_l(r) = V(r) + (l + 1/2)^2 r^{-2}$, $r_{\min}(E_{ln})$ и $r_{\max}(E_{ln})$ — классические точки поворота (использована система единиц, в которой $\hbar = 2m = 1$).

При возмущении опорного потенциала $V(r)$ на величину $\Delta V(r) = \tilde{V}(r) - V(r)$ энергия E_{ln} уровня с номером n в первом порядке теории возмущений изменяется на

$$\Delta E_{ln} = \tilde{E}_{ln} - E_{ln} = \Big(\int\limits_0^\infty \Psi^2(E_{ln}, r)\, dr\Big)^{-1} \int\limits_0^\infty \Delta V(r) \Psi^2(E_{ln}, r)\, dr, \tag{2}$$

где $\Psi(E_{ln}, r)$ — регулярное ($\Psi(E_{ln}, r) \underset{r\to 0}{\sim} r^{l+1}$) решение УШ с опорным потенциалом, а $\tilde{E}_{ln}$ — уровень энергии УШ с новым потенциалом $\tilde{V}(r)$. Тогда выключение или включение только одного состояния с энергией E_{li}' $(0 < E_{li}' < E_l^0 < E_{ln})$, т. е. изменение числа состояний на $\Delta_i N = \mp 1$, соответствует лишь изменению на единицу номера уровня в старом спектре $\tilde{E}_{ln} = E_{l,n-\Delta_i N}$.

Рассмотрим случай больших квантовых чисел $n \gg 1$. Считая энергию E_{ln} дифференцируемой функцией номера n $\left(\Delta E_{ln} \approx -\frac{dE_{ln}}{dn} \Delta_i N\right)$ и используя в (2) квазиклассическое выражение для $\Psi(E_{ln}, r)$ [6], получим:

$$\int\limits_{r_{\min}(E_{ln})}^{r_{\max}(E_{ln})} \{E_{ln} - V_l(r)\}^{-1/2} \Delta_i V(r)\, dr = -2\Delta_i N \frac{d}{dn} \int\limits_{r_{\min}(E_{ln})}^{r_{\max}(E_{ln})} \{E_{ln} - V_l(r)\}^{1/2} dr, \tag{3}$$

где $\Delta_i V(r)$ — поправка к потенциалу $V(r)$ при выключении или включении одного состояния с энергией E_{li}'. Формула (3) вместе с условием квантования (1) дает:

$$\int\limits_{r_{\min}(E_{ln})}^{r_{\max}(E_{ln})} \{E_{ln} - V_l(r)\}^{-1/2} \Delta_i V(r)\, dr = -2\pi \Delta_i N. \tag{4}$$

Уравнение (4) справедливо в области асимптотического (по n) поведения спектра E_{ln}, где и справедливо условие (1). Отметим, что поправка $\Delta_i V(r)$ определяется лишь функцией $\Psi(E_{li}', r)$, которая меняет свой вид при переходе от классически доступной области $r_{\min}(E_{li}') < r < r_{\max}(E_{li}')$ к области $r > r_{\max}(E_{li}')$, где $\Psi(E_{li}', r)$ экспоненциально убывает (выключение состояния) или возрастает (включение нового состояния), в связи с чем при $r \gg r_{\max}(E_{li}')$ поправка $\Delta_i V(r)$ является монотонной функцией переменной r.

Представим формулу (4) в виде

$$\int\limits_{r_{\min}(E_{ln})}^{r_{\max}(E'_{li})} \{E_{ln}-V_l(r)\}^{-1/2}\,\Delta_i V(r)\,dr + {}$$

$$+\int\limits_{r_{\max}(E'_{li})}^{r_{\max}(E_{ln})} \{E_{ln}-V_l(r)\}^{-1/2}\,\Delta_i V(r)\,dr = -2\pi\Delta_i N. \qquad (5)$$

Так как для удерживающих потенциалов $E_{ln}\to\infty$ при $n\to\infty$, первый из интегралов в левой части (5) оказывается малым по сравнению со вторым и формула (5) принимает вид

$$\int\limits_{r_{\max}(E'_{li})}^{r_{\max}(E_{ln})} \{E_{ln}-V_l(r)\}^{-1/2}\,\Delta_i V(r)\,dr = -2\pi\Delta_i N. \qquad (6)$$

Уравнение (6) (относительно $\Delta_i V(r)$) является уравнением типа Абеля [7] и в области $r_{\max}(E_{li}')<r<r_{\max}(E_{ln})$ имеет решение:

$$\Delta_i V(r) = -2V_l'(r)\{V_l(r)-E'_{li}\}^{-1/2}\,\Delta_i N. \qquad (7)$$

В связи с тем, что энергия E_{ln} ($E_{ln}>E_l^0$) может быть выбрана произвольной, в том числе и $E_{ln}\to\infty$, формула (7) оказывается справедливой для любых значений $r>r_{\max}(E_{li}')$.

В общем случае, последовательно выключая N_1 состояний с энергиями $E_{li}'=E_{ln_i}$ ($i=1, 2, \ldots, N_1$; $0<E_{ln_i}<E_l^0$) и включая N_2 новых состояний с энергиями E'_{li} ($i=N_1+1, \ldots, N_1+N_2$; $0<E_{li}'<E_l^0$), для поправки к потенциалу $\Delta V(r)$ в асимптотической области $r\gg r_{\max}(E_l')$ получаем

$$\Delta V(r)\approx \sum_{1\leqslant i\leqslant N_1+N_2} \Delta_i V(r) \approx -2V_l'(r) \sum_{1\leqslant i\leqslant N_1+N_2} \{V_l(r)-E'_{li}\}^{-1/2}\,\Delta_i N. \qquad (8)$$

При изменении числа состояний на величину $\Delta N = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant N_1+N_2} \Delta_i N = N_2-N_1\neq 0$ из формулы (8) следует

$$\Delta V(r) \underset{r\to\infty}{\simeq} -2\Delta N\, V'(r)/V^{1/2}(r), \qquad (9)$$

а при сдвиге уровней энергии

$$\Delta V(r) \underset{r\to\infty}{\simeq} \frac{V'(r)}{V^{3/2}(r)} \sum_{1\leqslant i\leqslant N_1} \{E_{ln_i}-E'_{l,i+N_1}\}. \qquad (10)$$

Полученные формулы (9), (10) соответствуют результатам работ [1—3], в которых асимптотики поправок к потенциалу $\Delta V(r)$ определялись путем решения уравнения Гельфанда—Левитана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. ДАН СССР, 1982, 262, № 6, с. 1364. [2] Гостев В. Б., Френкин А. Р. Об изменении дискретного спектра радиального уравнения Шредингера. Препринт. физ. фак. МГУ, 1982, № 5/1982. [3] Адамян М. Н. ТМФ, 1981, 48, № 1, с. 70. [4] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. [5] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, 15, с. 309. [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974, гл. VII. [7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963, ч. 1, с. 322—323.

Поступила в редакцию
27.05.82