УДК 535.417

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СЛОИСТЫХ СРЕД

А. В. Тихонравов

(кафедра математики)

В данной работе рассматривается вопрос о получении априорных оценок для широкого класса задач синтеза, к которым относятся задачи синтеза многослойных оптических покрытий, акустических волноводов, СВЧ-синтеза (направленные ответвители, согласующие переходы) и др. Для всех этих задач процесс распространения волны в слоистой среде описывается телеграфными уравнениями

$$\frac{dy_1}{dx} = ik\rho(x)\,y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = ik\frac{1}{\rho(x)}\,y_1. \tag{1}$$

Здесь k — волновое число, $\rho(x)$ — нормированное волновое сопротивление слоистой среды (x — направление стратификации). Величины y_1 и y_2 назовем условно напряжением и током, их реальный физический смысл зависит от конкретной задачи. Например, для задачи синтеза многослойных оптических покрытий величина y_1 равна E — амплитуде электрического поля, $y_2 = H\sqrt{\varepsilon_l}$ — амплитуде магнитного поля, нормированной на показатель преломления подложки $n_l = \sqrt{\varepsilon_l}$ (ε — диэлектрическая проницаемость). Для этой задачи координата x связана с геометрической координатой z вдоль нормали к слоистому покрытию равенством $x = \int\limits_0^z n(z)\,dz$, где $n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ — показатель преломления слоистой среды, волновое сопротивление $\rho(x)$ равно $n_l/n(x)$.

Если x_0 — толщина слоистой среды, ρ_0 — волновое сопротивление внешней среды (из которой падает волна), а $y_1(x,k)$ и $y_2(x,k)$ — решения (1) с начальными условиями $y_1(0,k)=1$, $y_2(0,k)=-1$, то энергетические коэффициенты отражения R и пропускания T слоистой среды определяются по формулам

$$R(k) = \left|\frac{y_1+\rho_0 y_2}{y_1-\rho_0 y_2}\right|^2_{x=x_0}, \quad T(k) = \left|\frac{2\sqrt{\rho_0}}{y_1-\rho_0 y_2}\right|^2_{x=x_0},$$

причем $R+T\equiv 1$ (так как $\rho(x)$ — вещественная функция, т. е. слоистая среда — без потерь).

При синтезе, как правило, задается спектральный диапазон $[k_1, k_2]$, на нем — функция $\hat{T}(k)$, близким к которой надо получить коэффициент $T(k)$, и требуемая точность аппроксимации $\hat{T}$ — δ. Близость T и $\hat{T}$ оценивается обычно в равномерной или квадратичной метриках.

В работе [1] доказана следующая теорема об аппроксимации $\hat{T}$: для любого интервала $[k_1, k_2]$ с $k_1>0$ и $k_2<\infty$ любой непрерывной на нем функции $\hat{T}(k)$, удовлетворяющей условию $0\leqslant\hat{T}(k)\leqslant 1$, существует слоистая среда конечной толщины x_0 с волновым сопротивлением $\rho(x)>0$, коэффициент пропускания которой $T(k)$ аппроксимирует $\hat{T}(k)$ с любой наперед заданной точностью δ в равномерной или квадратичной метриках.

Фигурирующее в утверждении теоремы условие $\rho(x)>0$ является естественным условием физической реализуемости волнового сопротивления. Однако в ряде задач, например в задачах синтеза оптических покрытий, условия физической реализуемости накладывают на $\rho(x)$ более жесткие ограничения: $\rho_{min}\leqslant\rho(x)\leqslant\rho_{max}$. Кроме того, требования практической реализуемости могут ограничивать допустимую толщину среды x_0 и ряд других параметров $\rho(x)$: быстроту ее осцилляций, допустимое число скачков и т. п. При наличии таких ограничений точность аппроксимации $\hat{T}$ уже не может быть любой.

В связи с этим большой интерес представляет получение априорных оценок достижимости заданных значений $\hat{T}$ в отдельных, наиболее важных частных случаях.

Первая оценка такого типа приведена в работах [2, 3]:

$$T\geqslant 1/\mathrm{ch}^2\left\{\frac{1}{2}\overset{x_0}{\underset{0}{\mathrm{V}}}[\ln\rho(x)]\right\}. \tag{2}$$

Она связывает достижимую близость T к нулю с величиной полной вариации функции $\ln\rho(x)$. Оценка (2) справедлива при любом k. Очевидно, однако, что она отражает не все ограничения, наложенные на T снизу: при малой по сравнению с длиной падающей волны толщине слоистой среды x_0 и ограниченной $\rho(x)$. T не может быть мал даже при сколь угодно большой полной вариации $\ln\rho(x)$. Дополняющая (2) оценка легко может быть получена из уравнений (1). Сделаем в (1) замену $y_1=r_1\cos\theta_1+i\,r_2\cos\theta_2$, $y_2=-r_2\sin\theta_2+i\,r_1\sin\theta_1$, где r_i, θ_i — функции переменной x. Для них из (1) получаем уравнения

$$\frac{d\theta}{dx}=\mathrm{ch}\ln\rho(x)-\mathrm{sh}\ln\rho(x)\cdot\cos 2\theta, \tag{3}$$

$$r(x)=\exp\left[-\int\limits_0^x \mathrm{sh}\ln\rho(\xi)\cdot\sin 2\theta(\xi)\,d\xi\right]$$

с начальными условиями $\theta_1(0)=0$, $\theta_2(0)=\pi/2$.

Оценим $r(x)$ сверху. Для этого в интеграле в (3) сделаем замену $x=x(\theta)$. Получим

$$r[\theta(x)]=\exp\left(\int\limits_0^{\theta(x)}\frac{\sin 2\theta}{-\mathrm{cth}\ln\rho+\cos 2\theta}\,d\theta\right). \tag{4}$$

С ростом x θ монотонно возрастает. Анализируя (4), нетрудно показать, что максимальное значение r будет получаться, если на участке, где $\sin 2\theta>0$, $\rho(x)\equiv\rho_{min}$, а на участке, где $\sin 2\theta<0$, $\rho(x)\equiv\rho_{max}$. При этом, как легко вычислить, интеграл в аргументе экспоненты в (4) по любому интервалу $[\theta_0,\ \theta_0+\pi]$ будет равен $\ln(\rho_{max}/\rho_{min})$. Таким образом, на участке оси x, на котором θ возрастает на π, $r(x)$ не может увеличиться более чем в ρ_{max}/ρ_{min} раз. Отсюда следует, что значение $r(x_0)$ не превосходит $(\rho_{max}/\rho_{min})^{m+1}$, где $m=\left[\frac{1}{\pi}\overset{x_0}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\theta(x)\right]$ (квадратными скобками здесь обозначена целая часть числа).

С помощью известных теорем об оценке расстояния между двумя соседними нулями решений дифференциального уравнения второго по-

рядка [4] устанавливаем, что после замены переменной $\zeta = \int_0^x \rho(x)\,dx$ расстояние δ между двумя соседними нулями действительных и мнимых частей y_1 и y_2 удовлетворяет неравенству $\delta \geqslant \pi\rho_{\min}/k$.

Поэтому $\overset{x_0}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\,\theta(x) < \left[\frac{\zeta_0 k}{\pi\rho_{\min}}\right]\pi + \pi$, где $\zeta_0 = \int_0^{x_0} \rho(x)\,dx$. Для $r(x_0)$ окончательно получаем следующую оценку сверху:

$$r(x_0) \leqslant \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right)^{\left[\frac{\zeta_0 k}{\pi\rho_{\min}}\right]+1} < \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right)^{\left[\frac{k x_0 \rho_{\max}}{\pi\rho_{\min}}\right]+1}.$$

Отсюда уже следует оценка для $T(k)$:

$$T(k) \geqslant 1\Big/\left[\frac{\max\{1,\ \rho_0^2\}}{2\rho_0}\left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right)^{2\left[\frac{\zeta_0 k}{\pi\rho_{\min}}\right]+2} + \frac{1}{2}\right]. \tag{5}$$

Особенно удобный вид (5) приобретает для задачи синтеза оптических покрытий, в которой, как правило, показатель преломления внешней среды равен единице и, следовательно, $\rho_0 = n_l > 1$, а $\zeta_0 = n_l z_0$ (z_0 — общая геометрическая толщина покрытия):

$$T(k) \geqslant 2\Big/\left[n_l\left(\frac{n_{\max}}{n_{\min}}\right)^{2\left[\frac{k n_{\max} z_0}{\pi}\right]+2} + 1\right]. \tag{6}$$

При пользовании (6), (5) нужно, однако, иметь в виду, что, как следует из вывода, эти оценки несколько занижены. Пример использования оценки (6) в задаче синтеза оптических покрытий приведен ниже.

Получим еще одну полезную оценку. В формулируемых для синтеза заданиях очень часто требуется, чтобы у синтезируемой системы области высокого отражения соседствовали с областями высокого пропускания (система должна обладать фильтрующими свойствами). Важно знать, какие ограничения накладываются на ширину переходной между ними области.

В работе [1] показано, что аналитическое продолжение $1/T(k)$ в комплексную плоскость есть целая функция конечной степени $2x_0$. Из известного для таких функций неравенства Бернштейна следует, что

$$|(1/T(k))'| < 2x_0 \sup\{1/T(k)\}. \tag{7}$$

Пусть $T(k)$ возрастает от значения $T_1 > 0$ до значения $T_2 < 1$, соответственно $1/T$ убывает от $1/T_1$ до $1/T_2$. Из неравенства (7) сразу же получаем, что

$$1/T_1 - 1/T_2 < 2x_0 \sup\{1/T(k)\}\cdot\Delta k,$$

где Δk — ширина области перехода от значения T_1 до значения T_2. Отсюда следует оценка снизу для ширины переходной области:

$$\Delta k > \frac{\inf T(k)}{2x_0}\,\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}. \tag{8}$$

Покажем теперь на примере задачи синтеза оптических покрытий, в чем состоит практическое значение приведенных здесь оценок. Пусть синтезируются покрытия с чередующимися показателями преломления

n_H, n_L. Искомыми при этом являются число слоев покрытия N и их толщины $d_1, \ldots, d_N$. Если при сформулированных требованиях на $\hat{T}(k)$ неизвестно хорошее начальное приближение, приходится проводить перебор большого числа вариантов. Этот перебор может быть непосредственным или осуществляться в виде поиска локальных минимумов оценочного функционала при различных начальных приближениях [4]. Во всех случаях важно заранее представлять область, в которой следует выбирать параметры.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $n_H=2{,}00$, $n_L=1{,}45$, $n_l=1{,}52$. Пусть, далее, требуется получить в областях длин волн λ от 0,5 до 0,58 мкм и от 0,84 до 1,0 мкм $T(\lambda)\leqslant 0{,}01$, а в области от 0,6 до 0,8 мкм $T(\lambda)\geqslant 0{,}90$. Для системы из N однородных слоев с чередующимися n_H и n_L

$$\mathop{V}_{0}^{x} \ln \rho(x) \cong N \ln (n_H/n_L).$$

Полагая приближенно $\mathrm{ch}^2(\alpha/2)\cong e^{\alpha}/4$ из оценки (2) получаем

$$N \gtrsim \ln(4/T)/\ln(n_H/n_L), \tag{9}$$

что дает при $T=0{,}01$ $N\geqslant 19$.

Итак, для достижения требуемой величины отражения потребуется заведомо не менее 19 слоев.

Оценим теперь общую толщину слоистого покрытия, необходимую для достижения высокого отражения. Учитывая, что $k=2\pi/\lambda$, из (6) получаем следующую приближенную оценку:

$$z_0 \gtrsim \frac{\lambda}{4n_H} \ln\left(\frac{2}{n_l T}\right) \Big/ \ln\left(\frac{n_H}{n_L}\right). \tag{10}$$

Отсюда находим, что для получения при $\lambda=1$ мкм $T=0{,}01$ толщина покрытия должна быть более 2 мкм.

Эти данные показывают, с какого минимального числа слоев имеет смысл начинать синтез и какой толщины системы целесообразно рассматривать. Например, в программе синтеза работы [5] начальные приближения генерируются с помощью датчика случайных чисел. Надо заранее представлять, в каком диапазоне следует задавать их. Поскольку при $N=20$ средняя толщина одного слоя должна быть более 0,1 мкм, то, еще несколько завышая ее, примем этот диапазон равным 0—0,3 мкм.

Подобное использование приближенных оценок (9), (10) оказывается весьма полезным при конкретных расчетах.

Применим, наконец, еще оценку (8). Пусть $\inf T(k)\approx 0{,}01$, $z_0\approx 2$ (тогда $x_0<4$), $T_1=0{,}01$, $T_2=0{,}90$. Так как $\Delta k\cong -(2\pi/\lambda^2)\Delta\lambda$, то из оценки (8) ширина $\Delta\lambda$ перехода от области высокого пропускания к области отражения вблизи $\lambda=0{,}8$ мкм более 0,013 мкм. Практически оказывается, что ширина переходной области в два-три раза больше этого значения (заметим, что в неравенстве Бернштейна для функций того класса, к которому относится $1/T(k)$, стоит знак строгого неравенства). С учетом этого замечания оценка (8) позволяет заранее представить, какие требования на ширину переходной области являются реальными, что важно при формулировке задания на синтез.

В заключение отметим, что получение новых априорных оценок в задачах синтеза позволяет расширить и общетеоретические представления о свойствах слоистых сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тихонравов А. В. ЖВМ и МФ, 1982, 22, № 6, с. 1421. [2] Рейзенкинд Я. А. Автореф. канд. дис. Саратов, 1980. [3] Худак Ю. И. В кн.: Тр. XXV научно-техн. конф., секц. матем. М.: МИРЭА, 1976, с. 28. [4] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. [5] Гласко В. Б., Тихонов А. Н. ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1, с. 137.

Поступила в редакцию
16.04.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 3

УДК 551.465.11

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОВЛЕЧЕНИЯ В ШЕЛЬФОВОЙ ЗОНЕ МОРЯ

Н. К. Шелковников, В. В. Тимофеев

(кафедра физики моря и вод суши)

В настоящей работе исследуется изменчивость верхнего квазиоднородного слоя (ВКС) в прибрежной зоне бесприливного моря в результате воздействия различных факторов, в частности анализируется увеличение толщины ВКС вследствие процесса вовлечения.

Изучение процесса вовлечения, т. е. проникновения турбулентности в нетурбулизированную область, ранее проводилось в основном в лабораторных условиях. В результате были выявлены два основных механизма генерации турбулентности, снабжающие энергией этот процесс:

а) вертикальный диффузионный поток турбулентной энергии, генерируемой вследствие опрокидывания ветровых волн;

б) генерация турбулентности во всей толще ВКС и в сезонном термоклине (или в слое турбулентного вовлечения — СТВ) [1], вызванная сдвигом средней скорости.

В условиях моря оба этих механизма могут действовать одновременно, в лабораторных же моделях есть возможность выделить один из них. Так, вертикальный диффузионный поток энергии формировался с помощью колеблющихся решеток [2, 3, 4]. В результате этих экспериментов была выявлена связь между безразмерной скоростью вовлечения E и числом Ричардсона:

$$E = k\,\mathrm{Ri}^{-3/2}, \tag{1}$$

где $E = U_e/U_m$, $U_e = dh/dt$ — скорость вовлечения, h — толщина перемешанного слоя, U_m — некоторый масштаб скорости, $\mathrm{Ri} = g\Delta\rho l/(\rho U_m^2)$, $\Delta\rho$ — перепад плотности в СТВ, l — масштаб длины, k — эмпирический коэффициент, g — ускорение свободного падения.

Сдвиг скорости среднего течения, формирующий второй механизм энергоснабжения, создавался путем протяжки специального экрана по поверхности жидкости в кольцевом канале [5, 6] или за счет тангенциального трения воздушного потока [7, 8]. Зависимость (1) в этом случае имела вид

$$E = k\,\mathrm{Ri}^{-1}, \tag{2}$$

причем согласно [8] $k = 0{,}234$, а по данным [7] $k = 0{,}11$—$0{,}45$.

В настоящее время практически нет данных прямых измерений скорости вовлечения в морских условиях, что затрудняет получение каких-либо универсальных зависимостей.