нашим данным, для медленно охлаждаемого феррита магнитное упорядочение появляется при $T \approx 770$ K (в согласии с [10]). На том же рисунке показаны экспериментальные значения T_C, полученные Мексменом [11] при исследовании магнитных свойств образцов медного феррита, закаленных от различных температур $T_{зак}$. Как видно из рис. 3, расчетные значения T_C хорошо согласуются с результатами непосредственных магнитных измерений. Такое согласие тем более заслуживает внимания, что при изменении α меняется не только u, но и относительное число обменных связей Fe^{3+}—O^{2-}—Fe^{3+}, Fe^{3+}—O^{2-}—Cu^{2+}, Cu^{2+}—O^{2-}—Cu^{2+}.

Проведенные нами исследования подтверждают, таким образом, существенное влияние изменения кислородного параметра на точку Кюри феррита (T_C тем выше, чем меньше u). Это обстоятельство может оказаться важным при изыскании путей улучшения магнитных свойств ферритов, кристаллизующихся в структуру шпинели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Смит Я., Вейн X. Ферриты. М.: ИЛ, 1962. [2] Блясс Ж. Кристаллохимия феррошпинелей. М., 1968. [3] Van der Woude F., Sawatzky G. A. Proc. of Mössbauer spectrometry conference. Dresden, 1971, 1, p. 335. [4] Крупичка С. Физика ферритов и родственных им магнитных окислов. М.: Мир, 1976, т. 1. [5] Николаев В. И., Русаков В. С., Чистякова Н. И. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1983, 24, № 1, с. 74. [6] Николаев В. И. и др. В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. конф. «Термодинамика и технология ферритов». Ивано-Франковск, 1981, с. 133. [7] Николаев В. И., Русаков В. С., Чистякова Н. И. Там же, с. 133. [8] Ohnishi H., Teranishi T. J. Phys. Soc. Japan, 1961, 16, N 1, p. 35. [9] Verwey E. J. W., Haayman P. W. Physica, 1941, 8, N 9, p. 979. [10] Evans B. J., Hafner S. S. J. Phys. Chem. Solids, 1968, 29, p. 1573. [11] Mexmain J. Ann. Chim., 1969, 4, p. 429.

Поступила в редакцию
10.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1983, Т. 24, № 3

УДК 531.18

КОВАРИАНТНАЯ МЕХАНИКА И ФОРМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Н. П. Клепиков, А. Н. Шатний

(кафедра теоретической физики)

1. **Введение.** В последнее время интенсивно развивается релятивистская ковариантная классическая механика (РКМ) систем прямо взаимодействующих частиц с целью прояснения пространственной интерпретации прямого взаимодействия и применения этой теории к решению конкретных задач. Явная ковариантность в РКМ [1—3] достигается ценой введения дополнительного числа степеней свободы: на одну частицу системы N частиц приходится 4 степени свободы. Динамика системы задается N пуанкаре-инвариантными связями $f_a=0$, где функции f_a зависят от инвариантных комбинаций внутренних коллективных переменных [3]. Эти функции генерируют канонические преобразования движения в $8N$-мерном фазовом пространстве Φ. Генераторы группы Пуанкаре действуют в пространстве Φ и не зависят от наличия взаимодействия в системе.

Другой подход к описанию релятивистской системы частиц [4, 5] не является явно ковариантным и формулируется в терминах дираковских форм релятивистской динамики (ФД) [6], в которых наличие взаимодействия в системе описывается включением членов взаимодействия в генераторы группы Пуанкаре, действующие в $6N$-мерном минимальном фазовом пространстве (МФП). Поскольку РКМ и ФД претендуют на описание одной и той же физической ситуации, естественно выяснить, при каких дополнительных условиях и с какой степенью произвола ФД могут быть получены из РКМ. Ответ на этот вопрос дан в настоящей работе. Другим результатом работы является уточнение и обобщение постановки задачи в ФД, а также интерпретация в классической механике доказанной в [7] физической эквивалентности квантовых ФД. Часть результатов настоящей работы была изложена в [8]. С тех пор в печати были опубликованы работы (см., например, [9]), в которых подробно обсуждается задание калибровки и эволюции системы в РКМ, поэтому эти вопросы в настоящей статье подробно не рассматриваются.

2. Генераторы группы Пуанкаре и эволюция в формах динамики. Переход от РКМ к 3-мерной формулировке подразумевает исключение N степеней свободы и, следовательно, переход от описания системы в пространстве Ф к описанию в МФП. Для этого перехода N связей РКМ $f_a=0$ должны быть дополнены N связями $\zeta_a=0$ с условием $\det\|\{\zeta_b, f_a\}\|\neq 0$. Как известно [10], после такого перехода симплектическая структура в МФП определяется либо в терминах исходных переменных пространства Ф скобками Дирака [10]:

$$\{A, B\}^*=\{A, B\}-\{A, \zeta_a\}C_{ab}\{\zeta_b, B\}, \quad a, b=1, \ldots, 2N, \tag{1}$$

где $\zeta_{a+N}=f_a$ для $a=1, \ldots, N$, C_{ab} — матрица, обратная матрице $\|\{\zeta_a, \zeta_b\}\|$, $\{,\}$ — скобка Пуассона в Ф, либо обобщенными скобками Пуассона в терминах переменных МФП [8] (в общем случае неканонических). Для сохранения в теории нетривиальной эволюции дополнительные связи ζ_a должны содержать параметры эволюции, причем, как и в РКМ, может быть введено N параметров эволюции. Уравнения движения в МФП, заменяющие уравнения движения в РКМ, в общем виде выписаны в [8, 9].

Рассмотрим свойства релятивистской инвариантности при описании системы в МФП. Произвольный генератор Г из набора генераторов группы Пуанкаре генерирует в Ф каноническое преобразование δ согласно $\delta A=\{A, \Gamma\}\delta v$, где A — некоторая динамическая переменная, δv — параметр преобразования. После перехода к МФП тот же генератор Г генерирует в МФП преобразование $\delta^*: \delta^* A=\{A, \Gamma\}^*\delta v$. Если преобразования δ и δ^* для любых A совпадают по крайней мере на поверхности $\zeta_a=0$, $a=1, \ldots, 2N$, соответствующие генераторы Г не меняются при переходе к МФП и не зависят от потенциалов взаимодействия, которые могут входить в f_a. Если преобразования δ и δ^* не совпадают даже на упомянутой поверхности, соответствующие генераторы Г после перехода к МФП должны включать потенциалы взаимодействия. Таким образом, при переходе к МФП мы можем получить дираковские ФД: мгновенную, если

$$\{\zeta_a, (\vec{\mathscr{P}}, \mathbf{J})\}\big|_{\zeta_b=0}=0, \tag{2}$$

точечную, если

$$\{\zeta_a, (\mathbf{K}, \mathbf{J})\}\big|_{\zeta_b=0}=0, \tag{3}$$

фронтовую (с выделенной осью x_3), если

$$\{\zeta_a, (\mathscr{P}_-, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, K_{1-}, K_{2+}, K_3, J_3)\}\big|_{\zeta_b=0}=0. \tag{4}$$

Здесь $\mathscr{P}_\nu$ — генераторы сдвигов, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$ — генераторы пространственных и лоренц-поворотов, $\mathscr{P}_\pm=\mathscr{P}^0\pm\mathscr{P}^3$, $K_{i\pm}=K_i\pm J_{3-i}$, $i=1, 2$.

Условия (2)—(4) оставляют большую свободу в выборе связей ζ_a. При разных выборах получаются разные варианты соответствующих ФД, которые отличаются способами задания начальных условий и способами включения взаимодействия в генераторы группы Пуанкаре. В перечисленных ФД минимальное число генераторов группы Пуанкаре содержит взаимодействие. Если при переходе к МФП не выполняется ни одно из условий (2)—(4), в результате получаются более сложные ФД.

Обычно при формулировке теории в ФД полагают, что задание генераторов группы Пуанкаре, и в их числе гамильтониана, которому приписывается смысл генератора сдвига по лабораторному времени, полностью исчерпывает задачу задания динамики релятивистской системы. Изложенное выше приводит к противоположной точке зрения: динамика в ФД должна быть задана независимо от трансформационных свойств, описываемых генераторами группы Пуанкаре. При этом лишь в частном случае гамильтониан является генератором сдвига по лабораторному времени.

Эволюция в ФД, как и в РКМ, вообще говоря, является многопараметрической. Выделение однопараметрической эволюции посредством фиксирования $N-1$ параметров эволюции эквивалентно наложению калибровочных условий в РКМ [3]. Начальные условия для уравнений движения в ФД задаются на поверхности $f_a=0$, $\zeta_a(\xi_1^0, ..., \xi_N^0)=0$, $a=1, ..., N$, где ξ_a^0 — начальные значения параметров эволюции.

3. **Модели в трех формах динамики.** Продемонстрируем получение из РКМ, сформулированной в [3], моделей в трех формах динамики. В [3] для двухчастичной системы введены коллективные переменные $P=(E, \mathbf{P})$, $R=(T, \mathbf{R})$ — 4-импульс и 4-координата в с.ц.и., $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ — относительные импульс и координата в с.ц.и., q, τ — разность энергий и времен частиц в с.ц.и., связанные с индивидуальными переменными частиц x_a^ν и p_a^ν каноническим преобразованием. В связи РКМ $f_{1,2}=0$ могут быть введены два потенциала взаимодействия:

$$f_1=\sqrt{E^2-\mathbf{P}^2}-\mathfrak{M}, \quad f_2=q-\frac{m_1^2-m_2^2}{2\mathfrak{M}}-W, \tag{5}$$

$$\mathfrak{M}=\sqrt{m_1^2+\mathbf{k}^2}+\sqrt{m_2^2+\mathbf{k}^2}+V.$$

Комбинации внутренних переменных $\mathbf{k}^2$, $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{kr}$, τ, от которых могут зависеть V и W, пуанкаре-инвариантны. Рассмотрим случай, когда V не зависит от τ и $W=0$ [3]. Дополним связи $f_{1,2}=0$ связями $\zeta_1^I=T-T'=0$, $\zeta_2^I=\tau-\tau'=0$, где T' и τ' — параметры. Легко убедиться в том, что переменные $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ остаются каноническими координатами в МФП, а генераторы $\vec{\mathscr{P}}$ и $\mathbf{J}$ остаются свободными от взаимодействия. Следовательно, в результате перехода к МФП получается один из вариантов мгновенной ФД. Что касается генераторов $\mathscr{E}$ и $\mathbf{K}$, то

$$\{A, \mathscr{E}\}^*=\{A, \mathscr{E}^*\}_I, \ \{A, \mathbf{K}\}^*=\{A, \mathbf{K}^*\}_I, \tag{6}$$

где $\mathscr{E}^*$ и $\mathbf{K}^*$ являются функциями канонических переменных МФП:

$$\mathscr{E}^*=\sqrt{\mathfrak{M}^2+\mathbf{P}^2}, \ \mathbf{K}^*=\mathbf{P}T'-\mathscr{E}^*\mathbf{R}+[\mathbf{P}[\mathbf{kr}]]/(\mathscr{E}^*+\mathfrak{M}), \tag{7}$$

а индекс I означает, что соответствующие скобки Пуассона вычисляются в МФП.

Генератор $\mathscr{E}=p_{10}+p_{20}$ в РКМ является генератором сдвига времени с.ц.и. T и не меняет других динамических переменных. После перехода к МФП соответствующий генератор $\mathscr{E}^*$, содержащий взаимодействие, интерпретируется согласно (6) и (7) как генератор преобразования динамических переменных системы, соответствующего сдвигу параметра эволюции T'. Аналогичному изменению интерпретации в силу $\{\mathbf{K}, \zeta_1{}^I\}^* \neq 0$ подвергаются и генераторы буста. Начальные условия в полученном варианте мгновенной ФД задаются на поверхности $f_{1,2}=0$, $\zeta^I{}_{1,2}=0$ $(T'=T_0', \tau'=\tau_0')$, которая не совпадает с поверхностью равных времен $t_1=t_2=t$ в пространстве Минковского.

Для получения точечной ФД дополнительные связи должны удовлетворять условиям (3). Введем новые переменные $\mathbf{G}=\mathbf{P}/M$, $\mathbf{R}_G$, M, S, связанные с переменными $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$, E, T каноническим преобразованием с производящей функцией $F=M\mathbf{GR}-MG_0T$, $G_0=\sqrt{1+\mathbf{G}^2}$. Координаты, сопряженные $\mathbf{G}$ и M, имеют вид $\mathbf{R}_G=\partial F/\partial\mathbf{G}=M(G_0\mathbf{R}-\mathbf{G}T)/G_0$, $S=-\partial F/\partial M=G_0T-\mathbf{GR}$, а первая из связей (5) запишется в виде $f_1=M-\mathfrak{M}=0$. Выберем дополнительные связи $\zeta_1{}^P=S-S'=0$, $\zeta_2{}^P=\tau-\tau'=0$. Легко видеть, что в МФП координаты $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}_G$, M, S остаются каноническими, генераторы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{K}$ свободны от взаимодействия, но для генераторов сдвига получим

$$\{A, \mathscr{P}_\nu\}^*=\{A, \mathscr{P}_\nu{}^*\}_P, \quad \mathscr{P}_\nu{}^*=G_\nu\mathfrak{M},$$

где скобки Пуассона в МФП определены в указанных канонических переменных. В полученном варианте точечной ФД начальные условия задаются на поверхности $f_{1,2}=0$, $\tau=\tau_0'$, $G_0T-\mathbf{GR}=S_0'$, а гамильтониан $\mathscr{E}^*=\mathscr{P}_0{}^*=G_0\mathfrak{M}$ задает преобразование динамических переменных, соответствующее сдвигу параметра эволюции $\xi=T-\mathbf{GR}/G_0$.

Для получения фронтовой ФД введем вектор $\varkappa=\Lambda_{P'}^{-1}\Lambda_\infty p_1$, где Λ_∞ — безвращательное преобразование Лоренца к системе отсчета, движущейся со скоростью света вдоль положительного направления оси x^3, $P'=\Lambda_\infty P$, $\Lambda_{P'}{}^{-1}$ — безвращательное преобразование Лоренца в систему, в которой $\mathbf{P}'=0$. Относительный импульс $\mathbf{k}$ можно представить в виде $k=\Lambda_P{}^{-1}p_1$, где подразумевается $k_{10}=M/2+q$, $k_{20}=M/2-q$. Преобразование $R=\Lambda_{P'}^{-1}\Lambda_\infty\Lambda_P$, связывающее векторы $\varkappa$ и $\mathbf{k}$, является вращением. Явный вид R есть

$$R=1-N^{-1}\rho, \ \rho=\begin{bmatrix} P_1^2 & P_1P_2 & P^1(M+P_-) \\ P_1P_2 & P_2^2 & P^2(M+P_-) \\ -P^1(M+P_-) & -P^2(M+P_-) & P_1^2+P_2^2 \end{bmatrix},$$

где $N=P_-(M+P_0)$, $M=(P_+P_--P_1{}^2-P_2{}^2)^{1/2}$, $P_\pm=P^0\pm P^3$. Введем новые коллективные переменные, получаемые посредством канонического преобразования с порождающей функцией

$$F=P^1R^1+P^2R^2+(P_+-P_-)R^3/2-(P_++P_-)T/2+R_{ij}(P_+, P_-, P^{1,2})\varkappa_i r_j,$$

зависящей от «новых» импульсов и «старых» координат. Дифференцируя F, найдем координаты, канонически сопряженные $P^{1,2}$, $P_\pm$, $\varkappa$:

$$\begin{aligned} R_F{}^i&=\partial F/\partial P^i=R^i+(\partial R_{lm}/\partial P^i)\varkappa_m r_l, \\ r_i{}^F&=\partial F/\partial\varkappa_i=R_{ji}r_j, \\ R_\pm&=-\partial F/\partial P_\pm=(T\mp R^3)/2-(\partial R_{lm}/\partial P_\pm)\varkappa_m r_l. \end{aligned} \tag{8}$$

В терминах новых коллективных переменных комбинации генераторов группы Пуанкаре, фигурирующие в условиях (4), принимают простой вид:

$$\mathscr{P}_- = P_-, \quad \mathscr{P}^{1,2} = P^{1,2}, \quad J_3 = [\mathbf{R}_F, \mathbf{P}]_3 + [\mathbf{r}_F, \varkappa]_3,$$
$$K_3 = P_+R_+ - P_-R_-, \quad K_{1-} = 2P^1R_+ - P_-R_F^1,$$
$$K_{2+} = 2P^2R_+ - P_-R_F^2, \tag{9}$$

а первую из связей (5) можно записать в виде $f_1 = P_+P_- - P_1^2 - P_2^2 - \mathfrak{M}^2 = 0$. Для перехода к МФП выберем дополнительные связи в виде $\zeta_1^F = R_+ - R' = 0$, $\zeta_2^F = \tau - \tau' = 0$, где R' и τ' — параметры. Скобка Дирака (1) для связей $f_{1,2} = 0$, $\zeta^F{}_{1,2} = 0$ есть

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} + \{A, \tau\}\{f_2, B\} - \{A, f_2\}\{\tau, B\} +$$
$$+ (\{A, R_+\}\{f_1, B\} - \{A, f_1\}\{R_+, B\})/P_-. \tag{10}$$

После перехода к МФП координаты P^i, $R_F{}^i$, P_-, R_-, $\varkappa$, $\mathbf{r}_F$ остаются каноническими, генераторы $\mathscr{P}_-$, $\mathscr{P}^i$, J_3, K_{1-}, K_{2+} свободны от взаимодействия, а генератор $\mathscr{P}_+{}^*$, получаемый модификацией $\mathscr{P}_+$,

$$\{A, \mathscr{P}_+\}^* = \{A, \mathscr{P}_+{}^*\}_F, \quad \mathscr{P}_+{}^* = (\mathfrak{M}^2 + P_1{}^2 + P_2{}^2)/P_-,$$

где скобки Пуассона в МФП вычисляются в указанных переменных, описывает преобразование динамических переменных, соответствующее сдвигу параметра эволюции R'. Начальные условия в полученной ФД задаются на поверхности $f_{1,2} = 0$, $R_+ = R_0'$, $\tau = \tau_0'$. Однако для генератора K_3 из (10) получаем

$$\{A, K_3\}^* = \{A, K_3\} - (1/P_-)\{A, f_1\}R'$$

и, таким образом, генератор K_3 свободен от взаимодействия лишь при условии $R' = 0$. Выделенность фронтовой ФД среди других форм, как отмечал еще Дирак [6], состоит в том, что в ней всего три (а не четыре) комбинации генераторов группы Пуанкаре содержат взаимодействие. Как видим, это отличие связано с тем, что фронтовая ФД получается из более общей ФД, в которой генератор K_3 также содержит взаимодействие, ограничением $R' = 0$.

Другой, нежели рассмотренный выше, вариант мгновенной ФД, соответствующий заданию начальных условий на поверхности $t_1 = t_2 = t'$ в пространстве Минковского, получается из РКМ заданием дополнительных связей $\zeta_i = t_i - t' = 0$, $i = 1, 2$. Гамильтониан в этом случае описывает эволюцию по лабораторному времени. Сравнение этой модели с известной моделью [4] показывает, что они описывают одинаковую эволюцию системы при условии, что потенциал хотя бы в одной из моделей зависит от импульса системы $\mathbf{P}$.

4. Заключение. Из изложенного выше следует, что переход от РКМ к ФД с одним параметром эволюции заключается, во-первых, в задании калибровки и, во-вторых, в выборе параметра эволюции. С этой точки зрения физическая эквивалентность [7] различных ФД приобретает простую интерпретацию. Пусть начальные условия заданы в некоторой точке h_0 вне области фазового пространства Φ_V, в которой потенциалы взаимодействия отличны от нуля. Через точку h_0 проходит единственная N-мерная поверхность Σ — решение уравнений движения РКМ [3, 11]. Поверхность Σ может иметь сложный характер в Φ_V, но вне этой области переходит в две плоские (*in*- и *out*-) асимптотики. Выбор калибровки означает выбор некоторой кривой на Σ, а выбор параметра эволюции означает выбор параметризации этой кривой. Разные кривые на плоской части Σ соответствуют одним и тем же мировым линиям частиц [3]. Разные ФД, для которых описанные выше кривые при изменении параметра эволюции от $-\infty$ до $+\infty$, начинаясь на одной плоской части $(in\text{-})\Sigma$, проходят через зону взаимодействия и продолжаются на другой плоской части $(out\text{-})\Sigma$, дадут одно и то же преобразование рассеяния, т. е. являются физически эквивалентными [7]. Достаточными условиями физической эквивалентности ФД являются, например, условия $dt_i > 0$, $i=1, \ldots, N$, в частности $dt_i = dt > 0$, и условия $dT > 0$, $d\tau/dT \cdot E(m_1^2 - m_2^2)/2\mathfrak{M}^3 < 1$, в частности $dT > 0$, $d\tau = 0$.

В работе [5] прямым использованием рецептов перехода от одной ФД к другой, данных в [7], найдены параметры эволюции и поверхности начальных условий для трех ФД, которые являются частными случаями из множества ФД, выводимых из РКМ (см. п. 2 настоящей работы и [8]). Все множество вариантов ФД не было получено в [5], по-видимому, по той причине, что в [5] использовался частный вид переплетающих операторов без учета того, что в [7] последние определены с точностью до унитарных множителей, переводящих ФД в себя.

Заметим, что результаты настоящей работы свидетельствуют об излишней категоричности утверждения Рорлиха [9] о том, что ФД, «по-видимому, не могут описывать нетривиальную динамическую информацию», тем более что используемые в [9] варианты инвариантных калибровок фактически означают переход к разновидностям точечной ФД.

Рассмотрение ФД с точки зрения РКМ может дать весьма полезную информацию о физической природе широко известной теоремы «об отсутствии взаимодействия» [12]. По-видимому, справедливо следующее обобщение этой теоремы: в РКМ невозможен выбор калибровки, обеспечивающей одновременно каноничность координат частиц в МФП и инвариантность мировых линий частиц в присутствии взаимодействия. Справедлив частный случай сформулированного утверждения: в работе [13] доказана теорема о несовместимости пуанкаре-инвариантной калибровки, обеспечивающей инвариантность мировых линий частиц, с каноничностью координат частиц.

Авторы выражают благодарность С. Н. Соколову и Л. А. Кондратюку за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Todorov I. T. Preprint JINR, 1976, Dubna, N E2-10125. [2] Rohrlich F. Ann. Phys., 1979, **117**, p. 292. [3] Клепиков Н. П., Шатний А. Н. ТМФ, 1981, **46**, с. 50. [4] Pauri H., Prosperi G. M. J. Math. Phys., 1975, **16**, p. 1503. [5] Соколов С. Н. Препринт ИФВЭ. Серпухов, 1981, № 81—78. [6] Dirac P. A. M. Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, p. 392. [7] Соколов С. Н., Шатний А. Н. ТМФ, 1978, 37, с. 291. [8] Клепиков Н. П., Шатний А. Н. Деп. ВИНИТИ. М., 1981, № 3336-81 Деп. [9] Rohrlich F. Phys. Rev., 1982, **D25**, N 10, p. 2576; Phys. Rev., 1981, **D23**, N 10, p. 2201. [10] Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979, с. 408—441. [11] Клепиков Н. П. Ядерная физика, 1983, **37**, № 1, с. 218. [12] Currie D. C., Jordan T. F., Sudarshan E. C. G. Rev. Mod. Phys., 1963, **35**, p. 350. [13] Клепиков Н. П., Шатний А. Н. Деп. ВИНИТИ. М., 1981, № 3337-81 Деп.

Поступила в редакцию
28.06.82