относительно небольшим,

$$\int_0^{20\,эВ} \sigma_{3d-\varepsilon f}(\omega)\,d\omega \simeq 30\ Мб\cdot эВ,$$

и, во-вторых, что более важно, представляет собой практически плавную функцию энергии. Напротив, сечение $3d$—$4f$-перехода становится очень большим, достигая 122 Мб·эВ. Таким образом, в Ba^{2+} несомненно произошел коллапс $4f$-состояния. Что касается Cs^+, то особенности его кривой фотопоглощения могут быть объяснены без привлечения гипотезы коллапса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Майсте А. А. и др. ЖЭТФ, 1980, 78, с. 941. [2] Amusia M. Ya., Cherepkov N. A. In: Case studies in atomic physics, 1975, v. 5, p. 47. [3] Kennedy D. J., Manson S. T. Phys. Rev., 1972, A5, p. 227.

Поступила в редакцию
06.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 3

УДК 539.17.01

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ НЕСКОЛЬКИХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

В. В. Комаров, А. М. Попова, В. Л. Шаблов

(НИИЯФ)

В заметке дан метод построения резольвенты сужения заданного оператора на подпространство, порождаемое некоторым ортогональным проектором. Этот вопрос тесно связан с проблемой описания квазистационарных состояний и состояний дискретного спектра гамильтоновых операторов нескольких частиц [1].

С помощью методов работы [2] может быть доказана следующая теорема. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ задан самосопряженный оператор A с областью определения $\mathscr{D}(A)$ и пусть на $\mathscr{D}(A)$ определен симметричный, A-ограниченный оператор B с относительной нулевой границей. Пусть существует проектор P, такой, что $B=PBP$, и оператор B переводит $\mathscr{D}(A)$ в множество, плотное в $P\mathscr{H}$. Пусть существует сужение оператора A на подпространство $Q\mathscr{H}$, т. е. существует оператор QAQ, $Q=1-P$. Тогда при условии существования в точке z резольвенты оператора QAQ имеет место сходимость $R(z, A+\sigma B)\xrightarrow[\sigma\to+\infty]{} R(z, QAQ)Q$, где $R(z, A)=(z-A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Эта сходимость является сильной при всех z, $|\mathrm{Im}\, z|\geqslant\varepsilon>0$. Если A — оператор Гамильтона системы N тел, а B — положительный оператор, то $R(z, A+\sigma B)\xrightarrow[\sigma\to+\infty]{} R(z, QAQ)Q$ при всех z, не принадлежащих вещественной полуоси $[E_0, +\infty)$, где $E_0=\min\{E_d\}\in\sigma_{disc}(A)$. Когда $z=E+i0$, $E\in[E_0, +\infty)\setminus\sigma_{disc}(QAQ)$, сходимость следует понимать в соответствии с процедурой предельных переходов в теории рассеяния [3].

Покажем следствие из данной теоремы. Пусть $\{P_n\}$ — конечный набор ортопроекторов P_n, необязательно попарно ортогональных, и пусть P — полный проектор для $\{P_n\}$, т. е. P удовлетворяет условию:

$PP_n = P_n P = P_n$, $P = P^+ = P^2$. Тогда имеет место сходимость

$$R\left(z,\ A + \sum_n \sigma_n P_n\right) \to R(z, QAQ)\,Q,\ Q = 1 - P, \qquad (1)$$

независимо от порядка стремления к $+\infty$ параметров σ_n.

Докажем это утверждение для случая $\sum_n \sigma_n P_n = \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2$, и множества $(P_1 + P_2)\mathscr{H}$, плотного в $P\mathscr{H}$. Пусть $\mathscr{D}(A) = \mathscr{H}$ [3]. Тогда, если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то условия теоремы выполнены и $R(z, A + \sigma_1 P_1 + + \sigma_2 P_2) \xrightarrow[\sigma_1, \sigma_2 \to +\infty]{} R(z,\ QAQ)\,Q$. Предположим, что $(\sigma_1/\sigma_2) \to 0$, при $\sigma_1 \to \to +\infty$ и $\sigma_2 \to +\infty$. Тогда после предельного перехода $\sigma_1 \to +\infty$ получаем следующий результат:

$$R(z,\ A + \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2) \to R(z,\ Q_1 A Q_1 + \sigma_2 Q_1 P_2 Q_1)\,Q_1,\ \ Q_1 = 1 - P_1. \qquad (2)$$

Заметим, что оператор $Q_1 P = P Q_1$ является ортопроектором на $Q_1\mathscr{H}$ и $Q_1 P (Q_1 P_2 Q_1) = Q_1 P_2 Q_1$. Кроме того, можно показать, что множество $Q_1 P_2 Q_1 \mathscr{H}$ является плотным в $Q_1 P Q_1 \mathscr{H}$, тогда при $\sigma_2 = \to \infty$ резольвента в (2) сходится к резольвенте

$$R[z,\ Q_1(1-P)\,A\,(1-P)\,Q_1]\,Q_1(1-P) = R(z,\ QAQ)\,Q, \qquad (3)$$

где $Q = 1 - P$, $Q_1(1-P) = Q_1 Q = Q$.

Если A — оператор Гамильтона системы нескольких тел, то резольвенту оператора QAQ можно найти на основе формальной теории резонансов [4]. Действительно, пусть операторы $G_P(z)$, $G_Q(z)$ и $g(z)$ определены соотношениями:

$$G_P(z) = (zP - PAP)^{-1}P,\ G_Q(z) = R(z,\ QAQ)^{-1}Q,$$

$$g(z) = (zP - PAP - PAQG_Q(z)\,QAP)^{-1}P,$$

тогда как следует из [4], имеет место соотношение

$$R(z,\ A) = G_Q(z) + [1 + G_Q(z)\,QAP]\,g(z)\,[PAQG_Q(z) + 1]. \qquad (4)$$

Из равенства (4), имея в виду, что

$$R(z,\ A)\,P = [1 + G_Q(z)\,QAP]\,g(z) \ \text{и}\ PR(z,\ A)\,P = g(z),$$

находим

$$G_Q(z) = R(z,\ A) - R(z,\ A)\,P[PR(z,\ A)\,P]^{-1}PR(z,\ A). \qquad (5)$$

Из (5) можно получить информацию о положении существенного $\sigma_{ess}(QAQ)$ и дискретного $\sigma_{disc}(QAQ)$ спектров оператора QAQ. Пусть $P = \sum_j |a_j\rangle\langle a_j|$, $\langle a_i | a_j\rangle = \delta_{ij}$. Тогда из (5) вытекает: 1) $\sigma_{ess}(A) = = \sigma_{ess}(QAQ)$; 2) $\sigma_{disc}(QAQ)$ составлен из элементов $\sigma_{disc}(A)$, состояния которых лежат в $Q\mathscr{H}$, и корней детерминанта $[PR(z,\ A)\,P]$. Заметим, что свойство (1) есть следствие теоремы Вейля [5, 6], так как оператор $A - QAQ = PA + AP - PAP$ является вырожденным и, следовательно, компактным. Свойство (2) следует из теории вырожденных возмущений Вайнштейна—Ароншайна [6], причем $[PR(z,\ A)\,P]$ есть $(W - A)$-детерминант второго рода, и собственные значения оператора QAQ описываются второй $(W - A)$-формулой.

Для определения $R(z,\ QAQ)\,Q$ формально может быть записано уравнение на основе второго резольвентного тождества. Действительно, если существует такой оператор A', для которого оператор

$Q(A-A')Q$ удовлетворяет всем отмеченным выше свойствам, то

$$R(z, QAQ)Q=R(z, QA'Q)Q+R(z, QA'Q)Q(A-\\ -A')QR(z, QAQ)Q. \tag{6}$$

В случае задачи многих тел это уравнение может быть основой для записи систем уравнений типа Фаддеева [3].

В [7] была предложена другая схема для определения $R(z, QHQ)Q$, где H — оператор Гамильтона задачи трех тел: $H=H_0+\sum_{i,j}^{3} V_{ij}$, $Q=(1-P)$, и проектор P есть полный проектор, составленный из операторов проектирования на связанные состояния в подсистемах двух частиц. С помощью последовательных предельных переходов типа (5), (6) в уравнениях Фаддеева авторами работы [7] была сформулирована система интегральных уравнений (80), любое решение которой не совпадает с состоянием оператора QHQ.

Мы продемонстрируем этот факт на примере однородной системы уравнений типа (80) из [7], используя метод работы [8]:

$$\begin{aligned} f_1&=[(1-P_1)g_1(z)V_1-P_1]f_2=\mathscr{K}_1(z)f_2,\\ f_2&=[(1-P_2)g_2(z)V_2-P_2]f_1=\mathscr{K}_2(z)f_1, \end{aligned} \tag{7}$$

причем, как установлено в [7], $(f_1+f_2)\in Q\mathscr{H}$. Однако $f_i\notin Q\mathscr{H}$, и ядро системы (80) не совпадает с оператором QHQ.

В (7) $V_{12}=V_3=0$, $V_{23}=V_1$, $V_{13}=V_2$, $g_i(z)=(z-H_0-V_i)^{-1}$, $i=1, 2$, P_i — проектор на связанное состояние для потенциала V_i. Оператор $A_1(z)=1-\mathscr{K}_1(z)\mathscr{K}_2(z)$ после несложных преобразований приводится к виду

$$A_1(z)=g_1(z)[z-H_0-V_1-V_2-P_1(z-H_0)P_2+P_1V_2+\\ +V_1P_2]g_2(z)(z-H_0).$$

Следовательно, система (7) имеет нетривиальные решения при значениях z, собственных для несамосопряженного оператора $B_1(z)=z-H+P_1V_2+V_1P_2+P_1(z-H_0)P_2$. Аналогичный оператор $B_2(z)$ можно получить, рассматривая $A_2(z)=1-\mathscr{K}_2(z)\mathscr{K}_1(z)$. Очевидно, что операторы $B_1(z)$ и $B_2(z)$ не равны оператору QHQ (проектор Q в выражениях для этих операторов не содержится).

Приведем пример. Пусть $P_2=0$, тогда из (6), где $A-A'=V_2$, $A'=H_0+V_1$, следует система уравнений типа (7), если составляющая f_1 определяется в подпространстве $[1-g_0(z)V_2]Q\mathscr{H}$, а f_2 — в подпространстве $g_0(z)V_2Q\mathscr{H}$, где $g_0(z)=(z-H_0)^{-1}$. Очевидно, действие оператора $A_1(z)$ на функцию $f_1(z)$ из подпространства $[1-g_0(z)V_2]Q\mathscr{H}$ имеет вид

$$A_1(z)f_1\Rightarrow g_1(z)B_1(z)g_2(z)(z-H_0)[1-g_0(z)V_2]Q\mathscr{H}=\\ =g_1(z)B_1(z)Q\mathscr{H}=g_1(z)(zQ-QHQ)Q\mathscr{H}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для $A_2(z)$. Таким образом, для практического использования системы уравнений типа (80) из [7] необходимо не только знание полного проектора P, но и знание тех областей из $\mathscr{H}$, на которых ядра этой системы имеют смысл. Как следует из предшествующих рассуждений, предложенная в работе [7] система (80) для случая задачи трех тел является некоторой формальной записью, приводящей к ложным решениям в $\mathscr{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арсеньев А. А. Сингулярные потенциалы и резонансы. М.: Изд-во МГУ, 1974. [2] Александров А. П., Дмитриев В. И. В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1975, вып. 22, с. 23. Александров А. П. В кн.: Прямые и обратные задачи теории антенн. М.: Изд-во МГУ, 1976, с. 180. [3] Фаддеев Л. Д. Тр. МИАН, т. 69. М.: Изд-во АН СССР, 1963. [4] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. [5] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982. [6] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. [7] Кукулин В. И., Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. ЭЧАЯ, 1979, 10, № 6, с. 1236. [8] Newton R. Phys. Rev., 1967, 153, N 5, p. 1502.

Поступила в редакцию
24.11.82