контроля температуры серийных деталей с точностью ± 1—3% (в зависимости от режима термообработки и интервала температур) как в условиях образования окалины, так и при повышенной задымленности и влажности атмосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брамсон М. А. Инфракрасное излучение нагретых тел. М.: Наука, 1964. [2] Лебедева В. В., Новик В. К. Изв. АН СССР. Сер. Металлургия и горное дело, 1964, с. 143. [3] Свет Д. Я. В кн.: Проблемы металлургии. М.: Изд-во АН СССР, 1953, с. 99. [4] Топерверхи Н. И., Шерман М. Я. Теплотехнические измерительные и регулирующие приборы на металлургических заводах. М.: Металлургия, 1951. [5] Фуке М. К. Рассеяние света в газах, жидкостях и растворах. Л., 1977.

Поступила в редакцию
14.10.80

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 621.315.592

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПРИМЕСНОГО ЦЕНТРА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ. II

Ю. П. Дрожжов

(кафедра физики полупроводников)

§ 1. **Сильное поле.** В случае, когда низкочастотное поле, прикладываемое к образцу, достаточно сильно (критерий будет указан ниже), уже нельзя использовать разложение в ряд по амплитуде ε_{ω_0}.

В электромодуляционной спектроскопии измеряется разность

$$\epsilon_{ik}^{F}(\omega)-\epsilon_{ik}^{0}(\omega), \tag{1}$$

где $\epsilon_{ik}^{F,0}$ — диэлектрическая проницаемость при наличии (отсутствии) внешнего модулирующего поля.

С помощью метода [1] можно показать, что (1) соответствует изменению потенциальной функции

$$\Delta V=-e^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\left\{\varepsilon(t)R_p^{ic}G_c^{(0)}(\varepsilon_0)\frac{ie\hbar\varepsilon(t)\nabla_p}{i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}-\varepsilon_p+i\delta}\varepsilon(t)R_p^{ic}\right\}. \tag{2}$$

Пусть β — направление сильно модулирующего поля и направление распространения света.

Используя разложение поля в ряд Фурье и определение оператора G_c^0 [1], можно преобразовать (2) к виду:

$$\Delta V=-\frac{e^3}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{\omega_1\omega}\mathrm{Re}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}dt\cdot e^{i\omega_1 t-i(\omega+\omega_0)t}\times$$

$$\times\int d^3p\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\mathbf{e}_{\omega_1}\mathbf{e}_{\omega}\mathbf{e}_{\omega_0}\times\mathbf{R}^{ic}_{\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(t)}\left(\nabla_p\frac{\mathbf{R}_p^{ic}}{\hbar\omega-\varepsilon_p}\right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(t)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t'}^{t}\left[\varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(x)}-\hbar(\omega+\omega_0)\right]dx\right\},$$

$$\varepsilon_p\equiv\varepsilon_0+i\delta. \tag{3}$$

Формула (3) справедлива при $\hbar\omega_0/\varepsilon_0 \to 0$ и выполнении условия (6) [2]. Отсюда для $\varkappa^{\gamma\alpha\beta}(\omega_1, \omega, \omega_0)$ получим:

$$\varkappa^{\gamma\alpha\beta}(\omega_1\omega\omega_0) = -\frac{e^3}{(2\pi\hbar)^3}\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\int d^3p\,\frac{L_n^{\gamma *}(\mathbf{p})\,M_n^{\beta\alpha}(\mathbf{p})}{n\omega_0 - i\delta} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_n, \quad (4)$$

где

$$L_n^{\gamma}(\mathbf{p}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_C \mathbf{R}^{\gamma}_{\mathbf{p}+\frac{e}{\omega_0}\mathbf{F}u}\exp\left\{\frac{i}{\hbar\omega_0}\int_0^u\left[\varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{eF}{\omega_0}v} - \hbar(\omega_1 - n\omega_0)\right]\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}\right\}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (5)$$

$$M_n^{\beta\alpha}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\oint_C\left(\nabla^{\beta}_{\mathbf{p}+\frac{eF}{\omega_0}u}\,\frac{\mathbf{R}_{\mathbf{p}+\frac{eF}{\omega_0}u}}{\hbar\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{eF}{\omega_0}u}}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar\omega_0}\int_0^u\left\{\varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{eF}{\omega_0}v} - \hbar\left[\omega + \omega_0(1-n)\right]\right\}\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}\right\}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (6)$$

Для перехода от (3) к (4)—(6) произведено разложение в ряд Фурье, аналогичное использованному в работе [3]. Контур C охватывает отрезок $(-1, 1)$ в комплексной плоскости переменной u.

Интегралы (5) и (6) вычисляются стандартными методами. Отметим лишь особенности, присущие нашей задаче. Основной вклад здесь дают седловые точки и границы интегрирования по v в (5) и (6). Именно эта часть переходит в (1) [2] при уменьшении поля. Седловые точки дают член, исчезающий в пределе слабого поля.

После необходимых вычислений получим, что вклад в $\varkappa_n^{\gamma\alpha\beta}$, зависящий от амплитуды модулирующего поля, имеет вид:

$$\chi_{n\neq 1}^{f\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{n}\,\frac{e^3}{2\pi^{3/2}\varepsilon_0^2}\sqrt{\frac{m_1m_2m_3}{m_0^3}}\cdot\frac{P_0}{\sqrt{m_0}}\,\frac{\hbar\omega_0}{(\varepsilon_0 - \hbar\omega_n)^{3/2}}\,f_n^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{4}{3f_n} - \frac{1}{4f_n}\,\frac{\hbar^2(\omega+\omega_0-\omega_1)^2}{(\varepsilon_0-\hbar\omega_n)^2}\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_0 - \hbar\omega_n}{\varepsilon_0 - \hbar\omega}S^{\gamma\alpha\beta} + \frac{3}{2}f_n\frac{(\varepsilon_0-\hbar\omega_n)^2}{(\varepsilon_0-\hbar\omega)^2}\Pi^{\gamma\alpha\beta} - \frac{3}{4}\,\frac{\hbar^2(\omega_0+\omega-\omega_1)^2}{(\hbar\omega-\varepsilon_0)^2}\times\right.$$

$$\times\Pi^{\gamma\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,\frac{\hbar(\omega_1-\omega-\omega_0)}{\varepsilon_0-\hbar\omega}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0-\hbar\omega_n}}{\varepsilon_0-\hbar\omega}\,\frac{P_0}{\sqrt{m_0}}\,Q^{\gamma\alpha\beta} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\hbar(\omega_1-\omega-\omega_0)}{\hbar\omega-\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{(\varepsilon_0-\hbar\omega_n)\,m_0}}{P_0}\,R^{\gamma\alpha\beta} + \frac{3}{4}\,\frac{\hbar(\omega_1-\omega-\omega_0)}{\hbar\omega-\varepsilon_0}\times$$

$$\times f_n\frac{\sqrt{m_0(\varepsilon_0-\hbar\omega)}}{P_0}\,O^{\gamma\alpha\beta} + \frac{3}{4}R^{\gamma\alpha\beta}\,\frac{\hbar(\omega_1-\omega-\omega_0)}{\hbar\omega-\varepsilon_0}\,f_n\times$$

$$\left.\times\left[\frac{\sqrt{(\varepsilon_0-\hbar\omega_n)\,m_0}}{P_0} - \frac{\hbar^3(\omega_1-\omega-\omega_0)\sqrt{m_0}}{(\varepsilon_0-\hbar\omega)^2(\varepsilon_0-\hbar\omega_n)^{1/2}P_0}\right]\right\},$$

$$f_n = \frac{e\hbar E}{\sqrt{2m(\varepsilon_0-\hbar\omega_n)}}, \quad \hbar\omega < \varepsilon_0, \quad (7)$$

где

$$S^{\gamma\alpha\beta}=\operatorname{Im}\frac{P_0^{\gamma*}}{P_0}c^{\alpha\beta};\ \Pi^{\gamma\alpha\beta}=\frac{1}{3}\operatorname{Im}\left[\frac{P_0^{\gamma*}}{P_0}c^{\alpha\beta}+c^{\gamma\beta*}\frac{P_0^{\alpha}}{P_0}\right], \tag{8}$$

$$Q^{\gamma\alpha\beta}=\operatorname{Im}\frac{P_0^{\gamma}}{P_0}\frac{P_0^{\alpha}}{P_0}e^{\beta};\ R^{\gamma\alpha\beta}=\operatorname{Im}c^{\gamma\beta*}c^{\alpha\beta};$$

$$O^{\gamma\alpha\beta}=\operatorname{Im}\sum_{\delta=1,2}c^{\gamma\delta*}c^{\alpha\delta}e^{\beta},$$

$$\chi_1^{f\gamma\alpha\beta}=\chi_{n=1}^{\gamma\alpha\beta}\sqrt{\pi/2}\,f_1^{-1/2};$$

$$\varepsilon_0-\hbar\omega_n\equiv\varepsilon_0-\hbar\omega+\hbar\omega_0(n-1). \tag{9}$$

Отличие (9) от (7) связано с наличием полюса в седловой точке у интеграла (6), полюсы $\mathbf{R_p}$ не дают заметного вклада ни в $L_n(\mathbf{p})$, ни в $M_n(\mathbf{p})$. При получении (7) мы пренебрегли там, где это было возможно, различием между ω_1 и $\omega+\omega_0$. Выражение (7) применимо, если

$$f_n\leqslant 1, \tag{10}$$

условие слабого поля есть $f_n\ll 1$. В этом случае применима формула (1) [2].

§ 2. **Усреднение по случайному полю примесей.** Как было показано ранее, коэффициент нелинейной восприимчивости имеет особенность при определенном значении частоты падающего света. Разумеется, в реальных условиях эта особенность «размывается» за счет того или иного взаимодействия. В рассматриваемых условиях (сильнокомпенсированный материал) основную роль играет, по-видимому, рассеяние на примесном случайном поле.

В условиях эксперимента выполняется неравенство

$$(n_t^*a_B^3)^{2/5}r_0^2/a_B\gg 1. \tag{11}$$

Здесь n_t^* — эффективная концентрация примеси, a_B — боровский радиус, r_0 — радиус экранирования [4, 5]. Тогда усреднение по примесному случайному полю может быть выполнено по методике [4, 5]. Поскольку радиус локализации электрона на глубоком примесном центре много меньше, чем длина, характеризующая пространственное изменение случайного поля, то квантовые поправки, обусловленные случайным полем, необходимо учитывать лишь для электрона в зоне проводимости. В этом случае усредненная потенциальная функция $\langle V\rangle$, связанная с наличием примеси, имеет вид:

$$\langle V\rangle=-ie^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{\infty}ds\cdot\varepsilon(t)\mathbf{R}_\mathbf{p}^{ic}\times$$

$$\times\exp\left\{is\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon_p+ie\hbar\boldsymbol{\varepsilon}(t)\nabla_p\right]-5{,}1\,(1+i)\,s^{5/2}E_0^{5/2}\right\}\boldsymbol{\varepsilon}(t)\mathbf{R}_\mathbf{p}^{ic} \tag{12}$$

($\langle V\rangle$ — усредненная плотность энергии поля в среде).

Разлагая (12) в ряд по слабому полю и подставляя $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}_\omega e^{i\omega t}, \tag{13}$$

получим для усредненного коэффициента нелинейной поляризуемости следующее выражение:

$$\langle \chi^{\gamma\alpha\beta}(\omega_1\omega_0)\rangle = ie^3\hbar \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty ds \cdot R_p^{\gamma ic} e^{-5,1(1+i)(sE_0)^{5/2}} \times$$

$$\times \int_0^s ds' \exp\left[is'\left[\hbar(\omega_0+\omega_1)-\varepsilon_p\right]\right] \nabla_p^\beta e^{i(s-s')[\hbar\omega_1-\varepsilon_p]} R_p^{\alpha ci}, \qquad (14)$$

где $\varepsilon_p = \varepsilon_0 + \varepsilon^c{}_p$; $\varepsilon^c{}_p$ — закон дисперсии в зоне проводимости, $E_0 = 2{,}2\,(n^* a_B^3)^{2/5} W_B$, W_B — боровская энергия, ω_1 — частота падающего света, ω_0 — частота модулирующего поля.

Произведя необходимые выкладки и учитывая, что $\omega_0 \ll \omega_1$, можно привести (14) к виду

$$\chi^{\gamma\alpha\beta}(\omega) = \mathrm{Im}\, \frac{e^3}{\varepsilon_0^2} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_0^3}}\, \frac{P_0}{\sqrt{m_0}}\, E_0^{-1/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty u^{1/2} du \left[-S^{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y} + 6u\Pi^{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] \times$$

$$\times \int_0^\infty dt \cdot \exp\{-5{,}1\,(1+i)\,t^{5/2} + it(y-u)\}. \qquad (15)$$

Здесь $y = (\hbar\omega - \varepsilon_0)/E_0$, $S^{\gamma\alpha\beta}$ и $\Pi^{\gamma\alpha\beta}$ — введенные ранее тензоры (без взятия мнимой части). Интегралы типа (15) неоднократно вычислялись ранее. В области

$$-4 < y < 0$$
$$\chi(\omega) \sim \exp\{(\hbar\omega - \varepsilon_0)/E_0\}. \qquad (16)$$

При $|y| \gg 1$ получим прежнюю формулу. Таким образом, учет рассеяния на случайном поле приводит к «размытию» резонанса. Ширина этого «размытия» порядка E_0 и для компенсированного GaAs может составлять величину 50—100 мэВ, что вполне согласуется с экспериментальными данными [6]. Кроме того, случайное поле «перепутывает» действительные и мнимые части тензоров $S^{\gamma\alpha\beta}$ и $\Pi^{\gamma\alpha\beta}$, обеспечивая плавный переход от допороговой к запороговой области. (Естественно, в отсутствие рассеяния $\chi^{\gamma\alpha\beta}$ была неаналитической функцией в точке резонанса, поэтому переход от допороговой к запороговой области осуществлялся скачкообразно.)

Формула (15) справедлива, пока приложенное поле достаточно слабое. В принципе параметр, определяющий справедливость (15), должен быть получен из исследования более общего случая. Однако можно думать, что, как и в отсутствие случайного поля, вклад, описываемый (15), будет основным в произвольных полях. В этом отличие рассматриваемого эффекта от электропоглощения. Действительно, в нашем случае $\chi(\omega)$ не равно нулю в области $\hbar\omega < \varepsilon_0$ даже в пределе сколь угодно слабого поля.

Второе ограничение вытекает из необходимости учитывать изменение самого случайного поля при наложении внешнего поля. Этот эффект не играет роли [7], коль скоро

$$\varepsilon_\omega \ll E_i = (n_i^* a_B^3)^{3/5} (W_B/a_B). \qquad (17)$$

Для GaAs величина, стоящая в правой части (17), порядка 10^5—10^6 В/см, что значительно превосходит используемые в эксперименте [6] поля.

Автор глубоко благодарен проф. В. Л. Бонч-Бруевичу за интерес и обсуждения содержания данной работы, а также В. А. Морозовой за плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Келдыш Л. В. В кн.: Нелинейная оптика. Новосибирск: Наука, 1968, с. 6—21. [2] Дрожжов Ю. П. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1983, **24**, № 3, с. 38. [3] Келдыш Л. В. ЖЭТФ, 1964, **47**, с. 1945. [4] Бонч-Бруевич В. Л. В кн.: Статистическая физика и квантовая теория поля. М.: Наука, 1973, с. 337. [5] Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Кайпер Р., Миронов А. Г., Эндерлайн Р., Эссер Б. Электронная теория неупорядоченных полупроводников. М.: Наука, 1981. [6] Морозова В. А., Остробородова В. В., Такля. ФТП, 1980, **14**, с. 1785. [7] Esser B. Phys. Stat. Sol. (b), 1973, **58**, p. 149.

Поступила в редакцию
30.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 517.9 : 532.5

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАССТОЯНИЯ ДО МГНОВЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. К. Шатов

(кафедра математики)

Распространение малых возмущений давления в однородной вязкой сжимаемой жидкости описывается уравнением [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \chi \frac{\partial}{\partial t} \Delta u = c^2 \Delta u, \tag{1}$$

где $u(x, t)$ — динамическое давление ($x=\{x_1, x_2, x_3\}$), c — адиабатическая скорость звука, $\chi=[(4/3)\mu+\mu'+\varkappa(1/c_v-1/c_p)]/\rho_0$ (здесь μ — сдвиговая вязкость, μ' — объемная вязкость, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, ρ_0 — стационарная плотность, c_v и c_p — удельные теплоемкости). Для удобства введем безразмерные переменные, сохранив прежние обозначения $x_i=x_i/d$ $(i=1, 2, 3)$, $t=ct/d$, $\nu=\chi/(cd)$, где d — некоторая характерная длина.

Поле давлений, возбуждаемое действием мгновенного источника, расположенного в начале координат, описывается функцией $u(x, t)$ и определяется из уравнения [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta u = \delta(t)\,\delta(x) \tag{2}$$

при дополнительном условии: $u(x, t)\to 0$, если $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty$.

Представляя $u(x, t)$ в виде $u(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} g(x, p)\,dp$, $\sigma>0$,

и учитывая, что $\delta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\,dp$, для определения $g(x, p)$ полу-