Для GaAs величина, стоящая в правой части (17), порядка 10^5—10^6 В/см, что значительно превосходит используемые в эксперименте [6] поля.

Автор глубоко благодарен проф. В. Л. Бонч-Бруевичу за интерес и обсуждения содержания данной работы, а также В. А. Морозовой за плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Келдыш Л. В. В кн.: Нелинейная оптика. Новосибирск: Наука, 1968, с. 6—21. [2] Дрожжов Ю. П. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1983, **24**, № 3, с. 38. [3] Келдыш Л. В. ЖЭТФ, 1964, **47**, с. 1945. [4] Бонч-Бруевич В. Л. В кн.: Статистическая физика и квантовая теория поля. М.: Наука, 1973, с. 337. [5] Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Кайпер Р., Миронов А. Г., Эндерлайн Р., Эссер Б. Электронная теория неупорядоченных полупроводников. М.: Наука, 1981. [6] Морозова В. А., Остробородова В. В., Такля. ФТП, 1980, **14**, с. 1785. [7] Esser B. Phys. Stat. Sol. (b), 1973, **58**, p. 149.

Поступила в редакцию
30.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 517.9 : 532.5

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАССТОЯНИЯ ДО МГНОВЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. К. Шатов

(кафедра математики)

Распространение малых возмущений давления в однородной вязкой сжимаемой жидкости описывается уравнением [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \chi \frac{\partial}{\partial t} \Delta u = c^2 \Delta u, \tag{1}$$

где $u(x, t)$ — динамическое давление ($x=\{x_1, x_2, x_3\}$), c — адиабатическая скорость звука, $\chi=[(4/3)\mu+\mu'+\varkappa(1/c_v-1/c_p)]/\rho_0$ (здесь μ — сдвиговая вязкость, μ' — объемная вязкость, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, ρ_0 — стационарная плотность, c_v и c_p — удельные теплоемкости). Для удобства введем безразмерные переменные, сохранив прежние обозначения $x_i=x_i/d$ ($i=1, 2, 3$), $t=ct/d$, $\nu=\chi/(cd)$, где d — некоторая характерная длина.

Поле давлений, возбуждаемое действием мгновенного источника, расположенного в начале координат, описывается функцией $u(x, t)$ и определяется из уравнения [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta u = \delta(t)\,\delta(x) \tag{2}$$

при дополнительном условии: $u(x, t)\to 0$, если $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty$.

Представляя $u(x, t)$ в виде $u(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} g(x, p)\,dp$, $\sigma>0$,

и учитывая, что $\delta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\,dp$, для определения $g(x, p)$ получаем задачу:

$$\Delta g-\frac{p^2}{\nu p+1}g=-\frac{\delta(x)}{\nu p+1},\quad \lim_{|x|\to\infty} g(x,p)=0.$$

В трехмерном случае решением этой задачи является функция [3]

$$g(|x|,p)=\exp\left(-p|x|/\sqrt{\nu p+1}\right)/[4\pi|x|(\nu p+1)].$$

Для выполнения условий на бесконечности выбирается та ветвь корня, которая при положительных значениях p принимает положительные значения, а для выделения этой ветви на комплексной плоскости проводится разрез по лучу $(-\infty;\ -1/\nu]$.

Положим $s=\nu p+1$. Тогда

$$u(|x|,t)=\frac{\exp(-t/\nu)}{8\pi^2\nu|x|i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp\left(\frac{st}{\nu}-\frac{|x|\sqrt{s}}{\nu}+\frac{|x|}{\nu\sqrt{s}}\right)\frac{ds}{s}. \tag{3}$$

Деформированием контура преобразуем интеграл (3) в интеграл по контуру, состоящему из окружности $|s|=1$ и лучей по берегам разреза, соединяющих эту окружность с бесконечно удаленной точкой (на плоскости s разрез проводится по лучу $(-\infty;\ 0]$). Тогда

$$u(|x|,t)=\frac{\exp(-t/\nu)}{4\pi^2|x|\nu}\int_0^{\pi}e^{t\cos\varphi/\nu}\cos\left(\frac{t\sin\varphi}{\nu}-\frac{2|x|}{\nu}\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi-$$

$$-\frac{\exp(-t/\nu)}{4\pi^2|x|\nu}\int_1^{\infty}e^{-tz/\nu}\sin\left[\frac{|x|}{\nu}\left(\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\right]\frac{dz}{z}. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что второе слагаемое в правой части формулы (4) является решением уравнения (2) без правой части, и, следовательно, им можно пренебречь, поскольку фундаментальное решение определено с точностью до решения однородного уравнения. Заметим здесь, что при $\nu=0$ $g(|x|,p)=\exp(-p|x|)/(4\pi|x|)$ и поле давлений описывается функцией

$$u_0(|x|,t)=\frac{1}{8\pi^2|x|i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{p(t-|x|)}\,dp=\frac{\delta(t-|x|)}{4\pi|x|}. \tag{5}$$

Исследование функции (4) в общем случае довольно громоздко, поэтому мы проведем его при некоторых предположениях, а именно: будем считать, что $\nu\ll 1$ и $|x|,t\gg d_0>0$, т. е. построим асимптотику первого слагаемого в (4) при $\nu\to 0$, если $|x|,t\gg d_0>0$. Преобразуем первое слагаемое в правой части (4), введя новую переменную интегрирования по формуле $z=[2t\sin(\varphi/2)]^{1/2}$. В терминах этой переменной

$$u(|x|,t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2\nu|x|\sqrt{2t}}\int_0^{\sqrt{2t}}e^{-z^2/\nu}\cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\nu}\left(t\sqrt{1-z^2/(2t)}-|x|\right)\right]\frac{dz}{\sqrt{1-z^2/(2t)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2\nu|x|\sqrt{2t}}\int_0^{\sqrt{2t}}e^{-z^2/\nu}\cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\,\frac{z}{\nu}(t-|x|)\right]dz+\frac{1}{2\pi^2\nu|x|\sqrt{2t}}\times$$

$$\times \int_0^{\sqrt{2t}} e^{-z^2/\nu} \left\{ \frac{\cos [\sqrt{2/t}(z/\nu)(t\sqrt{1-z^2/(2t)}-|x|)]}{\sqrt{1-z^2/(2t)}} - \right.$$

$$\left. - \cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\frac{z}{\nu}(t-|x|)\right]\right\} dz. \tag{6}$$

Оценивая второе слагаемое в правой части этой формулы стандартными методами, нетрудно установить [4], что при $\nu\to 0$ оно имеет порядок $O(\sqrt{\nu})$. Далее, легко видеть, что интеграл в первом слагаемом правой части (6) можно (добавляя и вычитая интеграл от $\sqrt{2t}$ до бесконечности) записать так:

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi\nu}}{2} e^{-(t-|x|)^2/(2\nu t)} - \int_{\sqrt{2t}}^{\infty} e^{-z^2/\nu} \cos\left[\sqrt{\frac{2}{t}}\frac{z}{\nu}(t-|x|)\right] dz.$$

В этой формуле второе слагаемое убывает экспоненциально при $\nu\to 0$, $t\geqslant d_0>0$. Таким образом,

$$u(|x|,t) = \frac{1}{4\pi|x|}\frac{\exp[-(t-|x|)^2/(2\nu t)]}{\sqrt{2\pi\nu t}} + O(\sqrt{\nu}). \tag{7}$$

Положим $t-|x|=y$, $t/2=a^2$. Тогда [3]

$$\frac{\exp\{-(t-|x|)^2/(2\nu t)\}}{\sqrt{2\pi\nu t}} = \frac{\exp\{-y^2/(4a^2\nu)\}}{2a\sqrt{\pi\nu}} \underset{\nu\to 0}{\to} \delta(y) = \delta(t-|x|)$$

(предельный переход понимается в обобщенном смысле), т. е.

$$u(|x|,t) \underset{\nu\to 0}{\to} u_0(|x|,t) \text{ при } |x|,\ t\geqslant d_0>0.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением главного члена асимптотической формулы, т. е. функции

$$P(|x|,t) = \frac{1}{4\pi|x|}\frac{e^{-(t-|x|)^2/(2\nu t)}}{\sqrt{2\pi\nu t}}. \tag{8}$$

Из формулы (8) видно, что максимальное значение P принимает при $t\sim|x|$, а точнее, при $t=|x|+O(\nu)$, поэтому будем предполагать, что точечный приемник сигналов находится в точке x такой, что $|x|\geqslant d_0$, и применение формулы (8) для описания процесса распространения давления будет оправданным. Функция (8) приближенно описывает радиально-симметричное возмущение давления, распространяющееся из начала координат, причем профиль этого возмущения напоминает собой «расползающуюся» со временем гауссовскую кривую, вершина которой перемещается с единичной скоростью. Это свойство функции (8) позволяет определить точечным приемником расстояние до источника следующим образом.

Расстояние между точками перегиба увеличивается по мере удаления от начала координат. Следовательно, нужно знать расстояние между двумя ближайшими к максимальному значению нулями второй производной по времени функции (4) при фиксированном значении $|x|$. Асимптотическая при $\nu\to 0$ оценка второй производной функции (4) имеет вид

$$u_{tt} = \frac{1}{4\pi\nu^2|x|t^3\sqrt{2\pi\nu t}}\{[2\nu t(t-|x|)+|x|((t-|x|)^2-\nu t)]\times$$

$$\times e^{-(t-|x|)^2/(2\nu t)} + O(\nu^{3/2})\}.$$

Приравнивая первое слагаемое в фигурной скобке к нулю и решая полученное уравнение относительно t с точностью до членов порядка $O(\nu^{3/2})$, находим расстояние между нулями второй производной: $\Delta t=2\sqrt{\nu|x|}$. Таким образом, если измерен этот промежуток времени, расстояние до источника может быть вычислено по формуле

$$|x|=(\Delta t)^2/(4\nu). \tag{9}$$

Если амплитуда источника равна A, то наибольшее значение давления в точке x равно $A/(4\pi\nu|x|\sqrt{2\pi\nu|x|})$. Следовательно, если в точке x измерено наибольшее значение давления P_0 и по формуле (9) определено расстояние до источника, то амплитуда источника вычисляется по формуле

$$A=2P_0\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\frac{(\Delta t)^3}{\nu}. \tag{10}$$

Если кроме источника и приемника в среде присутствуют отражающие включения, не расположенные на прямой, соединяющей источник и приемник, то задний фронт возмущения давления будет искажаться отраженным сигналом. В этом случае расстояние до источника может быть вычислено по разности $\Delta t=\sqrt{\nu|x|}$ между точкой перегиба и точкой максимума кривой давления, и формулы (9), (10) преобразуются в формулы

$$|x|=\frac{(\Delta t)^2}{\nu};\quad A=16P_0\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\frac{(\Delta t)^3}{\nu}.$$

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность проф. А. Г. Свешникову за полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. [2] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. [4] Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию
16.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 539.17.01

ПРЕДРАВНОВЕСНАЯ ЭМИССИЯ СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Ф. А. Живописцев, А. К. Деб (Бангладеш), А. М. Сливной

(кафедра ядерных взаимодействий и ускорителей)

Различные модификации экситонной модели промежуточного распада хорошо воспроизводят форму энергетических спектров [1—3]. Большинство работ [2—6] в основном посвящено анализу ядерных реакций с нуклонами. Поэтому важным является развитие микроскопического формализма для описания ядерных реакций со сложными частицами — легкими ионами с $A\leqslant 4$ [7]. В настоящей работе мы исследуем специфику эмиссии сложных частиц в формализме S-матрицы с применением аппарата квантовых функций Грина [5, 6].

Рассмотрим ядерную реакцию вида

$$A+\alpha\to B+\beta,$$