Koonin S. Ann. Phys. (N. Y.), 1980, 125, p. 429. [5] Живописцев Ф. А. Ядерная физика, 1965, 1, с. 600. [6] Живописцев Ф. А., Ржевский Е. С. Изв. АН СССР, сер. физ., 1977, 41, с. 2160. [7] Бояркина А. Н. и др. Изв. АН СССР, сер. физ., 1981, 45, с. 1935. [8] Emrich K. Nucl. Phys., 1971, A160, p. 1. [9] Fröbrich P. Z. Phys., 1972, 255, p. 394. [10] Bonetti R., Camnasio M., Colli Milazzo L. Phys. Rev., 1981, C 24, p. 71.

Поступила в редакцию
26.07.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1983, Т. 24, № 4

УДК 519.95

ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ СХЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Для широкого класса экспериментов характерна следующая линейная схема измерения непосредственно не наблюдаемого объекта f:

$$\xi = Af+\nu,\ \xi\in\overline{\mathcal{R}},\ f=\mathcal{R}. \tag{1}$$

Здесь ξ — результат измерения искаженного шумом ν выходного сигнала Af линейного прибора A, на вход которого подан (неизвестный) сигнал f, $\mathcal{R}$, $\overline{\mathcal{R}}$ — евклидовы пространства. Погрешность ν характеризуется корреляционным оператором Σ, $\Sigma x = E\nu(x, \nu)$, $x\in\overline{\mathcal{R}}$, и удовлетворяет условию $E\nu=0$.

В ряде случаев о сигнале f априори не известно ничего. Но иногда можно считать, что f — случайный вектор, и задан его корреляционный оператор F, $Fx=Ef(x, f)$, $x\in\mathcal{R}$. Наконец, в некоторых задачах естественно считать случайным оператор A. В каждом из перечисленных случаев речь идет о соответствующей модели схемы измерения (1).

Пусть $R\xi=RAf+R\nu$ — линейное преобразование сигнала ξ. $R\xi$ можно рассматривать как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал прибора RA, на вход которого подан тот же сигнал f, или как выходной сигнал измерительно-вычислительного комплекса, если вектор $R\xi$ вычислен на ЭВМ, соединенной с прибором A. Связь между параметрами, характеризующими качество прибора A, и аналогичными параметрами комплекса «A+ЭВМ» может оказаться весьма неожиданной. Пусть в (1) f — не зависящий от ν случайный вектор с корреляционным оператором F [1]. Тогда минимальная ошибка h при интерпретации $R\xi$ как сигнала Uf, где U — заданный оператор, определяется равенством

$$h = E\|R\xi - Uf\|^2 = \inf\{E\|R'\xi - Uf\|^2 R'\in(\overline{\mathcal{R}}\to\mathcal{U})\} =$$
$$= \operatorname{Tr} U(F - FA^*(AFA^*+\Sigma)^{-1}AF)U^*. \tag{2}$$

Эта ошибка свойственна комплексу «A+ЭВМ», если $R\xi$ интерпретировать как выходной сигнал прибора U. Эта же ошибка для прибора A равна $h_0=E\|\xi - Uf\|^2=\operatorname{Tr}((A-U)F(A-U)^*+\Sigma)$. Рассмотрим класс импульсных сигналов $f=(0,\dots,0, f_s, 0,\dots,0]$, для которых $F_{ij}=\Delta^2\delta_{is}\delta_{js}$, $i, j=1,\dots,n$, $\Delta^2=Ef_s^2$, и положим $U=I$ (идеальный прибор), $\Sigma=\sigma^2I$ (белый шум), $A_{ss}=1$. Тогда погрешности $h=\sigma^2\Delta^2(\sigma^2+\Delta^2(A^*A)_{ss})^{-1}$ и $h_0=\Delta^2((A^*A)_{ss}-1)+n\sigma^2$ будут характеризовать так называемую рэлеевскую разрешающую силу комплекса «A+ЭВМ» и прибора A соответственно. В данном случае характерно, что разрешение комплекса при фиксированном σ оказывается тем выше, чем оно ниже у прибора A.

§ 1. **Модель [А, Σ].** Будем говорить, что задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1), если известны математические модели прибора и погрешности, т. е. заданы операторы $A\in(\mathcal{R}\to\overline{\mathcal{R}})$ и $\Sigma\in(\overline{\mathcal{R}}\to\overline{\mathcal{R}})$ *.

1°. **Качество модели [А, Σ] в задаче редукции.** Простейшая задача редукции сигнала ξ к виду, какой он имел бы на выходе заданного прибора, ставится следующим образом. Задан линейный оператор (прибор) $U\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U})$, требуется найти линейный оператор $R\in(\overline{\mathcal{R}}\to\mathcal{U})$, для которого при любом $f\in\mathcal{R}$

$$E\|R\xi-Uf\|^2=\inf\{E\|R'\xi-Uf\|^2\,|\,R'\in(\overline{\mathcal{R}}\to\mathcal{U}),\ ER'\xi=Uf\}. \qquad (3)$$

Если задача (3) разрешима, то $ER\xi=RAf=Uf$, и сигнал $R\xi=RAf+R\nu=Uf+R\nu$ можно интерпретировать как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал прибора U, на вход которого подан сигнал f. Задачу (3) будем называть задачей редукции к прибору U (для комплекса «A+ЭВМ»). При $U=I$ речь идет о редукции к идеальному прибору, не искажающему входной сигнал.

Теорема 1 [2]. Условие $U\in\mathcal{D}_A=\{U'\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U}),\ U(I-A^-A)=0\}$ необходимо и достаточно для разрешимости задачи (3). При этом

$$R\xi=U\hat{f},\ \hat{f}=A^-(I-\Sigma^{1/2}(P\Sigma^{1/2})^-)\,\xi=A^-Af+\hat{\nu}, \qquad (4)$$

$$h(U)=E\|R\xi-Uf\|^2=E\|R\nu\|^2=E\|U\hat{\nu}\|^2=\mathrm{Tr}\,U\hat{\Sigma}U^*, \qquad (5)$$

где $P=I-AA^-$, $\hat{\Sigma}=A^-\Sigma^{1/2}(I-(P\Sigma^{1/2})^-P\Sigma^{1/2})\Sigma^{1/2}(A^*)^-\in(\mathcal{R}\to\mathcal{R})$ — корреляционный оператор $\hat{\nu}=A^-(I-\Sigma^{1/2}(P\Sigma^{1/2})^-)\nu$. Всякое решение задачи (3) с вероятностью единица совпадает с Uf в (4). Если невырожден оператор $AA^*+\Sigma$, то решение $R=UA^-(I-\Sigma^{1/2}(P\Sigma^{1/2})^-)$ единственно. В частности, если невырожден оператор Σ, то $R=U(A^*\Sigma^{-1}A)^-\times\times A^*\Sigma^{-1}$, причем $\hat{\Sigma}=(A^*\Sigma^{-1}A)^-$, $\hat{\nu}=(\Sigma^{-1/2}A)^-\Sigma^{-1/2}\nu$**. ▲

Задача редукции разрешима не для всякого прибора U***. Если решение существует, то $h(U)$ в (5) определяет ошибку или качество редукции к прибору U. Качество модели $[A, \Sigma]$ связано с величиной ошибки (5).

Определение [1]. Будем говорить, что качество модели $[A, \Sigma]$ не ниже, чем $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, и писать $[A, \Sigma]\prec[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, если $A^-A\geqslant\tilde{A}^-\tilde{A}$ и $\tilde{A}^-\tilde{A}\hat{\Sigma}\tilde{A}^-\tilde{A}\leqslant\hat{\tilde{\Sigma}}$. Если $[A, \Sigma]\prec[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ и $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]\prec[A, \Sigma]$, то модели эквивалентны, $[A, \Sigma]\sim\sim[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$.

Если $[A, \Sigma]\prec[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, и задача (3) разрешима для модели $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, то она разрешима для модели $[A, \Sigma]$, причем $h(U)\leqslant\tilde{h}(U)$. Можно сказать, что лучшей модели отвечают более широкие возможности редукции и менее интенсивный шум. Очевидно, $[I, 0]\prec[A, \Sigma]$ для любой модели $[A, \Sigma]$.

Пусть $B\in(\overline{\mathcal{R}}\to\overline{\overline{\mathcal{R}}})$ и $B\xi=BAf+B\nu$ — линейное преобразование измерения (1). Ему отвечает преобразованная модель $[BA, B\Sigma B^*]$. Нельзя ли улучшить модель путем такого линейного преобразования?

---

* $A\in(\mathcal{R}\to\overline{\mathcal{R}})$ означает, что A действует из пространства $\mathcal{R}$ в $\overline{\mathcal{R}}$.

** Черточка означает псевдообращение. По определению $A^-=\lim\limits_{\omega\to 0}A^*(AA^*+\omega I)^{-1}$.

*** Задача (3) разрешима для любого U лишь при условии невырожденности A^*A. Далее считается, что оператор $AA^*+\Sigma$ невырожден.

Ответ, как и следовало ожидать, отрицательный: $[A, \Sigma] \prec [BA, B\Sigma B^*]$ для любого $\bar{\bar{\mathcal{R}}}$ и любого $B \in (\mathcal{R} \to \bar{\bar{\mathcal{R}}})$ [1].

Приведем примеры преобразований, порождающих модели, эквивалентные $[A, \Sigma]: B = B_0 = I - \Sigma^{1/2}(P\Sigma^{1/2})^-, = A^- B_0, = A^* B_0$. Однако часто используемое преобразование $B = A^*$ может ухудшить модель: $[A, \Sigma] \prec \prec [A^*A, A^*\Sigma A]$ [1].

2°. **Роль дополнительной информации.** Во многих случаях «природу», «происхождение» сигнала f можно учесть, положив $f = St$, где оператор $S \in (\mathcal{R}_t \to \mathcal{R})$ характеризует, например, гладкость f, а вектор $t \in \mathcal{R}_t$ произволен. Рассмотрим **качество** такой информации о f для модели $[A, \Sigma]$. По аналогии с определением качества модели будем считать, что качество S не ниже, чем качество $\tilde{S}$, и писать $S \prec \tilde{S}$ ($\mathrm{mod}\,[A, \Sigma]$), если для всякого U условие $U\tilde{S} \in \mathcal{D}_{A\tilde{S}}$ влечет: $US \in \mathcal{D}_{AS}$ и $h_S \leqslant h_{\tilde{S}}$, где $h_S = \mathrm{Tr}\, US(AS)^- \Sigma^{1/2}(I - (P_S\Sigma^{1/2})^- P_S\Sigma^{1/2})(US(AS)^- \Sigma^{1/2})^*$ и $P_S = I - AS(AS)^-$. Иначе говоря, если разрешимость задачи (3) для всякого $f = \tilde{S}\tilde{t}$, $\tilde{t} \in \mathcal{R}_{\tilde{t}}$, влечет: 1) разрешимость задачи (3) для всякого $f = St$, $t \in \mathcal{R}_t$, и 2) неравенство $E\|R\nu\|^2 \leqslant E\|\tilde{R}\nu\|^2$, то $S \prec \tilde{S}$ ($\mathrm{mod}[A, \Sigma]$). Здесь R и $\tilde{R}$ — решения задачи (3) для $f = St$ и $f = \tilde{S}\tilde{t}$ соответственно.

Имеет место следующий замечательный факт.

Теорема 2. Для всякого $S: S \prec I$ ($\mathrm{mod}[A, \Sigma]$). ▲ Это означает, что любая информация вида $f = St$, $t \in \mathcal{R}_t$, не может ухудшить качество модели.

Рассмотрим, как может быть использована дополнительная информация о шуме. Будем говорить, что вектор $\nu = \Sigma^{1/2}\eta$ распределен нормально $N(0, \Sigma)$, если оператор $\Sigma \geqslant 0$ и вектор η контролируется нормальным распределением $\mathcal{N}(0, I)$.

Теорема 3 [2]. Пусть вектор ν распределен нормально $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ и $AA^* + \Sigma > 0$. Тогда статистики

$$\chi_m^2 = \|(\Sigma^{1/2})^-(\xi - A\hat{f})\|^2 \text{ и } \chi_n^2 = \|(\Sigma^{1/2})^- A(\hat{f} - f)\|^2$$

независимы и контролируются распределениями Пирсона с $m = \dim \mathcal{R}(\Sigma(I - AA^-))$ и $n = \dim \mathcal{R}(\Sigma) - m$ степенями свободы соответственно. ▲

Стандартные применения теоремы 3 в задачах анализа и интерпретации измерений сводятся к следующему. Пусть $\alpha_q(t)$ — вероятность того, что $\chi_q^2 \leqslant t$. Если модель $[A, \Sigma]$ отвечает действительности, и в результате измерения (1) найдено значение $t_\xi = \|(\Sigma^{1/2})^-(\xi - A\hat{f})\|^2$, то вероятность $1 - \alpha_m(t_\xi)$ должна быть достаточно велика, так как в противном случае измерение ξ следует признать противоречащим модели $[A, \Sigma]$. Если ξ не противоречит модели $[A, \Sigma]$, то эллипсоид $\{\tilde{f} \in \mathcal{R}, \|(\Sigma^{1/2})^- A(\hat{f} - \tilde{f})\|^2 \leqslant t\}$ покрывает истинный вектор f с вероятностью $\alpha_n(t)$. Однако на практике выводы, получаемые на таком пути, часто оказываются ошибочными. Этот важный факт обсуждается ниже.

§ 2. **Более полные модели.** Для модели $[A, \Sigma]$ характерна неустойчивость со всеми вытекающими отсюда неприятными последствиями [2]. Неустойчивость редукции сохраняется и после учета дополнительной информации о f и ν, рассмотренной выше. Однако можно привести пример информации о f, стабилизирующей задачу. Пусть в схеме (1) заданы A и Σ, а f — не зависящий от ν случайный вектор с корреляционным оператором $F \in (\mathcal{R} \to \mathcal{R})$. Речь идет о модели $[A, F, \Sigma]$, для которой естественна следующая постановка задачи редукции:

$$\inf\{F\|R'\xi - Uf\|^2 \mid R' \in (\bar{\mathcal{R}} \to \mathcal{U})\} = E\|R\xi - Uf\|^2. \quad (6)$$

Теорема 4 [2]. Пусть $AFA^*+\Sigma>0$. Тогда задача (6) имеет единственное решение $R=UFA^*(AFA^*+\Sigma)^{-1}$ для любого $U\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U})$, причем выполняется равенство (2). Задача (6) устойчива. ▲

В модели $[A, F, \Sigma]$ вектор $f_0=Ef$ существует, но неизвестен. Поэтому задачу редукции можно сформулировать аналогично (3):

$$\inf\{E\|R'\xi-Uf\|^2 \mid R'\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U}),\ E(R'\xi-Uf=0\}=E\|R\xi-Uf\|^2. \quad (7)$$

Поскольку условие $E(R'\xi-Uf)=(R'A-U)f_0=0$ эквивалентно $R'A=U$, то $E\|R'\xi-Uf\|^2=\mathrm{Tr}(R'A-U)F(R'A-U)^*+E\|R'\nu\|^2=E\|R'\nu\|^2$ и, следовательно, задача (7) для модели $[A, F, \Sigma]$ совпадает с задачей (3) для модели $[A, \Sigma]$ и наследует ее неустойчивость. В данном случае дополнительная информация о f не играет никакой роли.

Если вектор $f_0=Ef$ известен, то схема (1) преобразуется к виду

$$\xi_0=\xi-Af_0=A(f-f_0)+\nu \quad (8)$$

относительно $\varphi=f-f_0$. Модель схемы (8) обозначим $[A, f_0, F, \Sigma]$. Рассмотрим задачу редукции

$$\inf\{E\|R'\xi_0-U\varphi\|^2 \mid R'\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U}),\ E(R'\xi_0-U\varphi)=0\}=E\|R\xi_0-U\varphi\|^2. \quad (9)$$

В данном случае $E(R'\xi_0-U\varphi)=0$ для любых R' и U. Поэтому задача (9), формально сходная с задачами (3) и (7), оказывается эквивалентной (6), если в последней F заменить на F_0, $F_0x=E\varphi(x, \varphi)=Fx-f_0(x, f_0)$, и, следовательно, устойчива. В данном случае $R\xi_0+Uf_0$ следует рассматривать как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал прибора U, на вход которого подан сигнал f. При этом ошибка редукции равна $E\|(R\xi_0+Uf_0)-Uf\|^2=E\|R\xi_0-U\varphi\|^2$.

Характерно, что ошибка редукции в задаче (7) не меньше, чем в задаче (6), а последняя не меньше, чем в задаче (9). Эти факты следуют из неравенства $U(A^*\Sigma^{-1}A)^-U^*\geqslant U(A^*\Sigma^{-1}A+F^{-1})^{-1}U^*$, верного для всякого $U\in\mathcal{D}_A$, и из неравенства $U(A^*\Sigma^{-1}A+F^{-1})^{-1}U^*\geqslant U(A^*\Sigma^{-1}A+AF_0^{-1})^{-1}U^*$, верного для любого U, поскольку $F\geqslant F_0>0$ [2].

§ 3. **Эффект ошибки в задании оператора А.** Будем считать, что в схеме (1) A — случайный оператор с известным средним $A_0=EA$, заданы операторы Σ, F и $J=E(A-A_0)F(A-A_0)^*\in(\mathcal{R}\to\mathcal{R})$, а ν, f и A независимы. Речь идет о модели $[A_0, J, F, \Sigma]$. Если, кроме того, известен вектор $f_0=Ef$, то будем говорить, что задана модель $[A_0, J, f_0, F, \Sigma]$. Оказывается, что в любом случае ошибка в задании оператора A не вносит принципиально новых моментов в сказанное выше. Именно, имеет место

Теорема 5. При оговоренных предположениях $[A_0, J, F, \Sigma]=[A_0, F, \Sigma+J]$ и $[A_0, J, f_0, F, \Sigma]=[A_0, f_0, F, \Sigma+J]$. ▲

Для доказательства достаточно заметить, что, например, в случае модели $[A_0\ J,\ F,\ \Sigma]:\xi'=Af+\nu=A_0f+(A-A_0)f+\nu$ и $E\eta(x, \eta)=(\Sigma+J)x$, $x\in\mathcal{R}$, где $\eta=(A-A_0)f+\nu$.
Следовательно, эффект ошибки в задании оператора A фактически эквивалентен увеличению ошибки измерения ν в схеме (1) и формально может быть учтен заменой Σ на $\Sigma+J$.

Этот результат позволяет объяснить тот факт, что часто формальная проверка состоятельности модели $[A, \Sigma]$, основанная на теореме 3, дает отрицательный результат. Дело в том, что в экспериментальных исследованиях априорная информация о модели, как правило, не позволяет получить гарантий того, что $E(A-A_0)F(A-A_0)^*=0$. А это означает, что фактическая ошибка измерения характеризуется оператором $\Sigma+J>\Sigma$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, 120, № 2, с. 240. [2] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, 118, № 1, с. 19.

Поступила в редакцию
17.08.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 537.525

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ПОСТОЯННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ВЧ-РАЗРЯДА ОТ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

А. А. Кузовников, В. Л. Ковалевский, В. П. Савинов

(кафедра электроники)

Факт присутствия собственного постоянного электрического поля в ВЧ-разряде низкого давления давно установлен экспериментально [1—3]. Механизм возникновения напряжения V_0 постоянного электрического поля при контакте с плазмой электрода, находящегося под ВЧ-потенциалом (ВЧ-детектирование), убедительно объяснен нелинейным характером проводимости приэлектродного слоя пространственного заряда и экспериментально подтвержден в работе [4]. Как показано в работах [5, 6], присутствие собственных постоянных электрических полей в ВЧ-разряде приводит к возникновению пучков быстрых электронов, играющих важную роль в механизме этого разряда и обусловливающих сильную неравновесность плазмы ВЧ-разряда. Вместе с тем зависимость V_0 от основных параметров ВЧ-разряда до сих пор не изучена.

Актуальность подобных исследований очевидна, если учесть, что ВЧ-детектирование — это явление, происходящее в самых различных физических условиях, когда имеется контакт плазмы с ограничивающими ее поверхностями, находящимися под ВЧ-потенциалом (зонды в ВЧ-плазме, разрядные электроды в ВЧ-разряде, элементы установок для удержания плазмы, антенны радиопередатчиков в ионосфере и т. д.).

Настоящая работа посвящена экспериментальному изучению зависимости величины напряжения постоянного электрического поля V_0 от основных параметров ВЧ-разряда — амплитуды ВЧ-напряжения $V_{\sim}$, частоты ВЧ-поля f, давления p и рода рабочего газа, а также от материала электродов. Особый интерес представляло изучение зависимости V_0 от эмиссионной способности электродов, определяемой сочетанием «род рабочего газа — материал электродов».

Исследовался стационарный симметричный емкостный ВЧ-разряд в гелии и неоне в области давлений 10—1300 Па и диапазоне частот 0,5—12 МГц, т. е. в условиях, когда $f/\nu \ll 1$, где ν — частота столкновений электронов с атомами. Эффективные значения ВЧ-напряжения изменялись в пределах 100—1000 В. ВЧ-разряд создавался в стеклянных цилиндрических разрядных трубках с плоскими внутренними электродами из титана и молибдена, наиболее часто встречающихся в вакуумной и электронной технике. Диаметр разрядных трубок составлял 50—80 мм.

Измерения V_0 производились с помощью электрической цепи с одиночным цилиндрическим ленгмюровским зондом (рис. 1). При этом измерялась разность потенциалов постоянного электрического поля между электродом разрядной трубки и зондом, находящимся в точке