УДК 551.465

НОВЫЙ КЛАСС СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Н. К. Шелковников, С. А. Арсеньев

(кафедра физики моря и вод суши)

В работе [1] сообщается о наблюдении изменения по глубине модуля и направления скорости течения жидкости в озере, подобного знаменитой спирали Экмана, предсказанной теоретически [2] и впоследствии обнаруженной в океане [3], или спиралям Акерблома и Экснера, развивающимся в атмосфере [4, 5, 6]. В работе [1] не дано анализа явления, хотя и указано, что оно не может быть объяснено эффектом вращения Земли: вектор скорости течений отклонялся влево от направления ветра. Кроме того, отмечено, что явление вращения скоростей течений по глубине наблюдается только в южной части озера.

В настоящей работе будет показано, что это явление обусловлено ветром, дующим над поверхностью воды, уклоном дна и силой тяжести Земли. Подобные условия реализуются в бассейнах, расположенных на наклонной плоскости, например в реках, проточных водоемах, озерах или водохранилищах.

Направляя ось x по наклонной плоскости, ось y — перпендикулярно к ней, ось z — вниз и выбирая начало координат на поверхности воды, запишем уравнения теории и граничные условия в виде

$$\frac{d}{dz}\left(A\frac{du}{dz}\right)+g\sin\gamma=0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dz}\left(A\frac{dv}{dz}\right)=0, \tag{2}$$

$$A\left(\frac{du}{dz}\right)^2+A\left(\frac{dv}{dz}\right)^2=D, \tag{3}$$

$$D=cB^{3/2}/L,\ A=LB^{1/2},\ c=\text{const}=1/16, \tag{4}$$

$$L=-2\varkappa c^{1/4}\left[\frac{d}{dz}(\ln\psi)\right]^{-1},\ \psi=\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2,\ \varkappa=\text{const}=\frac{2}{5}, \tag{5}$$

$$A\frac{du}{dz}=-T_x^0,\ A\frac{dv}{dz}=-T_y^0\ \text{ при } z=0, \tag{6}$$

$$u=v=0 \qquad \text{при } z=H-z_0, \tag{7}$$

$$L\to 0 \qquad \text{при } z\to H, \tag{8}$$

где $T_x{}^0$, $T_y{}^0$ — плотности потоков импульса на поверхности, нормированные на плотность воды, по осям x и y соответственно, H — глубина, z_0 — высота шероховатости, остальные обозначения общеприняты [6—11].

Система уравнений (1)—(8) описывает горизонтально-однородное установившееся турбулентное течение жидкости, возбуждаемое равномерным ветром и силой тяжести. Предполагается, что изучаемая вертикаль находится достаточно далеко от берегов и влиянием на течение боковых границ бассейна можно пренебречь. В уравнениях (1), (2) не учтена сила Кориолиса: известно, что в мелких бассейнах влияние этой силы несущественно [11]. Кроме того, для упрощения задачи не будем учитывать молекулярную вязкость и диффузию энергии турбулентности *.

Уравнения (1)—(4), (6), (7) позволяют сразу же определить кинетическую энергию турбулентности в единице массы:

$$B = \frac{1}{c^{1/2}}\left[(gz \sin\gamma + T_x^0)^2 + (T_y^0)^2\right]^{1/2}. \tag{9}$$

С другой стороны, из (3)—(5) следует:

$$\frac{dL}{dz} - \frac{L}{B^{1/2}}\frac{d}{dz}(B^{1/2}) = \varkappa c^{1/4}. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет решение

$$L = \varkappa c^{1/4} B^{1/2} \int\limits_z^H \frac{dz}{B^{1/2}}, \tag{11}$$

удовлетворяющее условию (8). Используя теперь (4) и (11), найдем:

$$A = \varkappa c^{1/4} B \int\limits_z^H \frac{dz}{B^{1/2}}. \tag{12}$$

Формулы (9), (11) и (12) определяют характеристики турбулентности B, L и A как функции вертикальной координаты. Отметим, что интегралы (11), (12) при значении величины B, определяемой формулой (9), в элементарных функциях не выражаются.

В случае отсутствия уклона дна ($\gamma=0$) или ускорения силы тяжести ($g=0$) из формул (9), (11) и (12) можно найти решение задачи о ветровой циркуляции в мелком бассейне известной глубины [10]:

$$B = T^0/c^{1/2},\ L = \varkappa c^{1/4}(H - z),\ A = \varkappa u_*(H - z), \tag{13}$$

$$u = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_x^0}{u_*}\ln\left(\frac{H-z}{z_0}\right),\ v = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_y^0}{u_*}\ln\left(\frac{H-z}{z_0}\right), \tag{14}$$

где

$$T^0 = \left[(T_x^0)^2 + (T_y^0)^2\right]^{1/2},\ u_* = (T^0)^{1/2}.$$

Из решения (14) следует, что угол поворота вектора скорости течения $\varepsilon = \operatorname{arctg}(v/u) = \operatorname{arctg}(T_y^0/T_x^0)$ не зависит от вертикальной координаты z: течение на всех глубинах направлено по ветру.

Аналогично, в случае отсутствия ветра ($T_x^0 = T_y^0 = 0$) находится решение задачи о течении по наклонной плоскости:

$$B = g \sin\gamma \cdot z/c^{1/2},\ L = 2\varkappa c^{1/4}(H^{1/2} - z^{1/2})z^{1/2}, \tag{15}$$

$$A = 2\varkappa(g \sin\gamma)^{1/2}(H^{1/2} - z^{1/2})z, \tag{16}$$

$$u = \frac{(g \sin\gamma \cdot H)^{1/2}}{\varkappa}\left\{\ln\left[\frac{1 - z^{1/2}/H^{1/2}}{1 - (H - z_0)^{1/2}/H^{1/2}}\right] + \left(\frac{z}{H}\right)^{1/2} - \left(\frac{H - z_0}{H}\right)^{1/2}\right\}, \tag{17}$$

$v=0$ (течение направлено вдоль оси x).

---

* Тем самым мы отказываемся от точного описания очень тонких пограничных слоев, где соответствующие эффекты играют важную роль.

На рис. 1 приведены результаты расчета профиля скорости течения по формуле (17) — кривая 2 и данные измерений в дельте Волги. Как видим, соответствие теории и эксперимента хорошее.

Анализ формул (15), (16) показывает, что масштаб турбулентности L и коэффициент вихревой вязкости A имеют максимум в центральной области потока: при $z=H/4$ и $z=4H/9$ соответственно, обращаясь на поверхности и вблизи дна в ноль. Энергия же турбулентности B имеет вблизи дна максимум, обращаясь в ноль только на свободной поверхности воды. Подобный вид зависимости характеристик турбулентности B, L и A от вертикальной координаты z подтверждается

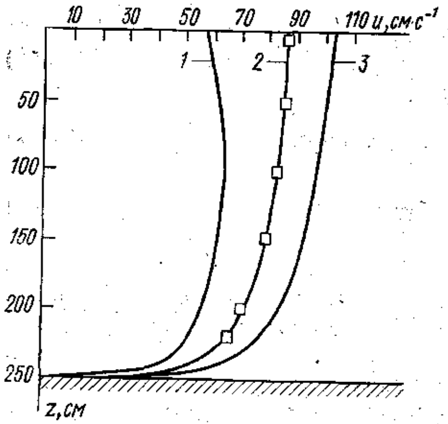

Рис. 1. Рассчитанные профили скорости течения в потоке на наклонной плоскости: при нагоне (*1*), при штиле (*2*), при сгоне (*3*); □ — данные наблюдений в дельте р. Волги при штиле

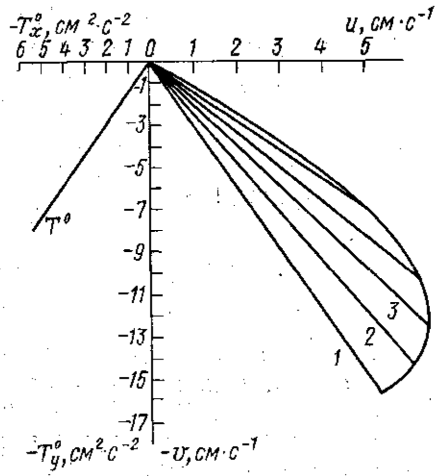

Рис. 2. Полярная диаграмма спирального вращения результирующего вектора скорости течения по глубине: вектор скорости течения на глубинах $z=0$ (*1*), 50 (*2*), 100 (*3*) см и т. д.; T^0 — тангенциальное напряжение ветра на поверхности воды; при отсутствии ветра течение направлено вдоль оси x: $v=0$, $u\neq 0$

численными расчетами [12] и данными прямых измерений турбулентности в каналах [13, 14].

В рассмотренных примерах вращение скорости течения по глубине отсутствует — течение либо направлено по ветру, либо вдоль наклонной плоскости. Приведем аналитическое решение еще одной задачи, в которой нет вращения, — задачи о ветровом нагоне ($T_x^0<0$) или сгоне ($T_x^0>0$) в бассейне на наклонной плоскости при отсутствии поперечной составляющей ветра ($T_y^0=0$). Имеем:

$$B=\frac{1}{c^{1/2}}\,|g\sin\gamma\cdot z+T_x^0|, \tag{18}$$

$$L=\frac{2\varkappa c^{1/4}}{g\sin\gamma}\,|T_x|^{1/2}\,[\,|T_x^H|^{1/2}-|T_x|^{1/2}], \tag{19}$$

$$A=\frac{2\varkappa}{g\sin\gamma}\,|T_x|\,[\,|T_x^H|^{1/2}-|T_x|^{1/2}], \tag{20}$$

$$u=\frac{|T_x|^{1/2}}{\varkappa}\left\{\ln\left[\frac{|T_x^H|^{1/2}-|T_x|^{1/2}}{|T_x^H|^{1/2}-|T_x^{H-z_0}|^{1/2}}\right]+\left|\frac{T_x}{T_x^H}\right|^{1/2}-\left|\frac{T_x^{H-z_0}}{T_x^H}\right|^{1/2}\right\}, \tag{21}$$

$z=0$, причем турбулентные напряжения в воде T_x определяются формулой

$$T_x = g \sin \gamma z + T_x^0, \tag{22}$$

а функции T_x^H и $T_x^{H-z_0}$ определяются из (22) при $z=H$ и $z=H-z_0$ соответственно. На рис. 1 показаны результаты расчетов по формулам (21), (22) искажения вертикального профиля скорости течения по наклонной плоскости действием ветра. Кривая *1* соответствует нагонному ветру: —20 м/с, кривая *2* — штилю, кривая *3* — сгонному ветру: 20 м/с. При расчетах уклон реки принимался равным $8{,}66 \cdot 10^{-5}$, глубина — 250 см и высота шероховатости — 0,1 см.

Наконец, рассмотрим общий случай, когда течение возбуждается произвольным ветром, силой тяжести и уклоном дна. Спиральное вращение результирующего вектора скорости течения по глубине иллюстрируется полярной диаграммой (рис. 2), полученной численным интегрированием системы (1)—(8). Расчеты проводились при значениях $H=280$ см, $z_0=30$ см и $\gamma=5 \cdot 10^{-5}$. Цифры у кривых соответствуют различным глубинам: *1* — вектор скорости течения на глубине $z=0$, *2* — на глубине $z=50$ см, *3* — на глубине 100 см. Как видим, ветер рассеивает течения по наклонной плоскости. В результате возникает спираль, сильно напоминающая спираль Экмана—Акерблома—Экснера, но отличающаяся от нее порождающими причинами. В частности, полученная спираль может вращаться в любую сторону в зависимости от направления ветра.

В заключение отметим, что эффекты, обусловленные совместным действием ветра, силы тяжести Земли и уклона дна, могут наблюдаться в устьях рек. По-видимому, этот случай и имел место в измерениях [1]: станция, на которой было зарегистрировано вращение векторов течений по глубине, находилась недалеко от устья реки Волхов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Филатов Н. Н. Изв. Всесоюз. географ. общества, 1975, **107**, № 3, с. 253. [2] Ekman V. W. Arkiv Mat. Astron. Fysik, 1905, **2**, N 11, p. 11. [3] Hankins K. Deep-sea Res., 1966, **3**, N 6, p. 607. [4] Akerblom F. Nova Acta Reg. Soc. Sc., 1908, ser. 4, **2**, N 2, p. 1. [5] Exner F. M. Ann. d. Hydr. u. Marit. Met., 1912, **5**, p. 226. [6] Монин А. С. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 1950, **14**, № 3, с. 232. [7] Арсеньев С. А. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1977, **13**, № 12, с. 1034. [8] Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Монин А. С. Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1967, **3**, № 3, с. 297. [9] Коротаев Г. К., Куфтарков Ю. М., Фельзенбаум А. И. ДАН СССР, 1976, **231**, № 4, с. 833. [10] Куфтарков Ю. М., Фельзенбаум А. И. В кн.: Проблемы теории ветровых и термохалинных течений. Севастополь, МГИ АН СССР, 1968, с. 90. [11] Фельзенбаум А. И. В кн.: Итоги науки и техники, Гидромеханика, 1968. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1970, с. 100. [12] Игнатова Г. Ш., Квон В. И. Метеорология и гидрология, 1978, № 7, с. 50. [13] Гришанин К. В. Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометиздат, 1979. [14] Шелковников Н. К., Букина Л. А., Миронов П. В. Метеорология и гидрология, 1980, № 3, с. 93.

Поступила в редакцию
23.09.82