ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 510.6 : 53.081

О ПРИМЕНЕНИИ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ФИЗИЧЕСКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

В. И. Шестаков

(кафедра общей физики для физического факультета)

§ 1. Равенство $W=V$ физических величин (ФВ) W и V обычно считают **бессмысленным**, если равенство $[W]=[V]$ их размерностей $[W]$ и $[V]$ **в одной и той же** системе физических единиц **не верно.**

Классическая (двузначная) логика B_2 имеет дело лишь с **истинными** или **ложными высказываниями.** Поэтому строгая теория равенств и неравенств ФВ возможна лишь при использовании **трехзначной логики,** оперирующей не только с **истинными** и **ложными,** но также и с **бессмысленными высказываниями.**

§ 2. В логике Бочвара [1, 2], обозначаемой ныне символом B_3, переменные $A, B, \ldots$ обозначают высказывания с тремя возможными **истинностными значениями:** T — «истина», F — «ложь» и N — «бессмыслица» [1]. Высказывание с истинностным значением T или F называется [1] **предложением.** «Очевидно, что предложение есть частный случай высказывания. Всякое высказывание или не имеет смысла, или истинно, или ложно» [1, с. 288]. **Классическое исчисление предложений** — частный случай **исчисления высказываний** (ИВ) — элементарной части B_3.

Все операции ИВ определимы [3] через две основные операции: «антидизъюнкцию» $A \,\overline{\cup}\, B$ высказываний A и B (обозначавшуюся ранее [3] символом $p\Psi q$) и **утверждение** («внешнее утверждение» [1]) $\vdash A$ высказывания A. Эти операции определяются здесь соответственно таблицами 1 и 2 — таблицами истинностных значений высказываний: «ни A, ни B» и «A верно». Пунктиром в этих таблицах выделены определения этих же операций для предложений.

Таблица 1

$\overline{\cup}$	B		
A	T	F	N
T	F	F	N
F	F	T	N
N	N	N	N

Таблица 2

A	$\vdash A$
T	T
F	F
N	F

Определения всех остальных нужных нам операций ИВ приведены в табл. 3, где вместо первоначального [1] знака $\underset{D}{=}$ **равенства по определению** используется современный знак $\rightleftharpoons$.

Операцию $\overline{\cup}$ и все операции, определимые лишь через нее, будем называть, следуя [1], «классическими», а все остальные операции ИВ — «неклассическими». Первые 5 операций табл. 3 являются классическими, а остальные — неклассическими.

Таблица 3

Название операции	Определение операции	«Чтение» [1] символа операции
Отрицание	$\sim A \rightleftarrows A \bar{\cup} A$	«не-A»
Конъюнкция	$A \cap B \rightleftarrows \sim A \bar{\cup} \sim B$	«A и B»
Дизъюнкция	$A \cup B \rightleftarrows \sim (A \bar{\cup} B)$	«A или B»
Импликация	$A \supset B \rightleftarrows \sim A \cup B$	«если A, то B»
Биимпликация	$A \supset\subset B \rightleftarrows (A \supset B) \cup (B \supset A)$	«A если и только если B»
Опровержение	$\bar{A} \rightleftarrows \sim \vdash A$	«A не верно»
Утверждение отрицания	$\urcorner A \rightleftarrows \vdash \sim A$	«A ложно»
Утверждение бессмысленности	$\downarrow A \rightleftarrows \vdash A \bar{\cup} \urcorner A$	«A бессмысленно»

Операции $\cap$ и $\sim$ являются **основными** в [1, 2] и определяются таблицами истинностных значений, а операции $\bar{A}$ $\urcorner A$ — формулами [2]: (D_{10}), (D_9). Лишь операции $A \supset\subset B$, $\bar{A}$ и $\urcorner A$ определяются в табл. 3 так же, как и в [2]. Все остальные операции определены в ней несколько иначе, чем в [1, 2], хотя символы и их «чтение» таковы же, как и в [1].

Названия первых четырех классических операций в [1, 2] заменены здесь наименованиями соответствующих операций классического исчисления предложений. Операция $A \supset\subset B$, соответствующая **эквивалентности («эквиваленции») предложений** в классическом исчислении предложений и называемая часто «**классической эквивалентностью**», названа здесь **биимпликацией.**

Для большей краткости символических выражений условимся: 1) опускать знак $\cap$, когда это не может вызвать недоразумений, и 2) опускать внешние скобки, содержащие в себе конъюнкции. Следуя этим условиям, мы можем, например, выражение $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ заменить выражением $AB \cup BC$ подобно тому, как в обычной алгебре выражение $(a \cdot b) + (b \cdot c)$ обычно заменяют выражением $ab + bc$.

Все **неклассические операции** ИВ являются **предложениями**, т. е. имеют смысл, когда их операнды (объекты операции) принимают любые истинностные значения, а классические операции ИВ имеют смысл, лишь когда все их операнды — предложения.

Любую операцию ИВ можно определить через операции, содержащиеся в табл. 1—3. Например, операцию $A \equiv B$ — «A эквивалентно B», определенную в [2] формулой (D_8), можно определить (используя принятые выше условия) через операции: $\vdash$, $\urcorner$, $\downarrow$, $\cap$ и $\cup$ следующей формулой:

$$A \equiv B \rightleftarrows \vdash A \vdash B \cup \urcorner A \urcorner B \cup \downarrow A \downarrow B.$$

Следует отметить, что «эквивалентность» в исчислении высказываний играет роль «математического равенства» [1, с. 292]. После того как некоторый символ определен посредством некоторого равенства по определению, его знак можно заменить знаком $\equiv$, и полученная таким образом эквивалентность будет верной по определению. Произведя такую замену в приведенном выше определении операции $A \equiv B$, получим следующую верную по определению эквивалентность:

$$(A \equiv B) \equiv \vdash A \vdash B \cup \urcorner A \urcorner B \cup \downarrow A \downarrow B.$$

В случае, если $\sim\downarrow A$ и $\sim\downarrow B$, т. е. если A и B **предложения**, то, как легко проверить, $(A\equiv B)\equiv(A\supset\subset B)$, $\vdash A\equiv A$, $\bar{A}\equiv\neg A\equiv\sim A$ и вообще все операции **над предложениями** сводятся к классическим операциям над ними.

Короче говоря, ИВ **над предложениями** сводится к классическому исчислению предложений, т. е. к **двузначной булевой алгебре**, роль равенства в которой исполняет эквивалентность высказываний, а операциями булева сложения, булева умножения и булева дополнения служат соответственно операции $\bigcup$, $\bigcap$ и $\sim$.

Формула в ИВ считается **доказуемой**, если при любых истинностных значениях ее членов ее истинностное значение есть T. Она считается **противоречием**, если не принимает истинностного значения T ни при каких истинностных значениях ее членов.

В ИВ принят за аксиому следующий **принцип вывода**: если $\mathfrak{A}$ и $\vdash\mathfrak{A}\supset\vdash\mathfrak{B}$ доказуемые формулы, то $\mathfrak{B}$ доказуемая формула.

§ 3. Используя **символы § 2**, можем написать формулу

$$\overline{[W]=[V]}\supset\downarrow(W=V), \qquad (a_0)$$

выражающую высказывание: «если равенство $[W]=[V]$ **не верно**, то равенство $W=V$ **бессмысленно»**, т. е. резюме первого абзаца § 1.

Эту формулу можно считать одним из основных постулатов теории размерностей ФВ. Этот постулат обычно неявно используется при проверке размерностей ФВ. Проверка любого равенства $W=V$, полученного при решении какой-либо физической задачи, обычно начинается с проверки равенства $[W]=[V]$ размерностей $[W]$ и $[V]$ величин W и V. Если в результате этой проверки окажется, что равенство $[W]=[V]$ **не верно,** то, в полном согласии с формулой (a_0), приходят к выводу, что равенство $W=V$ **бессмысленно.**

Следует, однако, заметить, что равенство $W=V$ может оказаться бессмысленным и тогда, когда равенство $[W]=[V]$ верно в некоторой системе физических единиц. Например, равенство $A=M$, где A — работа, а M — момент силы, бессмысленно, хотя $\vdash$ ($[A]=[M]$) в любых применяемых системах физических единиц.

Как видим, условие $\overline{[W]=[V]}$ в общем случае является лишь **достаточным, но не необходимым условием** бессмысленности равенства $W=V$. Иначе говоря, формула $\downarrow(W=V)\supset\overline{[W]=[V]}$ в общем случае ложна.

В силу определения операции $\bar{A}$ опровержения A и **закона контрапозиции** $(P\supset B)\equiv(\sim B\supset\sim P)$, справедливого для любых высказываний P и B, формула (a_0) эквивалентна формула

$$\sim\downarrow(W=V)\supset\vdash([W]=[V]), \qquad (a_0')$$

утверждающей: «если равенство $W=V$ имеет смысл, то равенство $[W]=[V]$ верно». Иначе говоря, для равенства размерностей ФВ достаточно, чтобы равенство самих ФВ имело смысл.

Но, как следует из определения операции $\downarrow A$, $\sim\downarrow A\equiv\vdash A\bigcup\neg A$ и, следовательно, формула (a_0') эквивалентна формуле

$$\vdash(W=V)\bigcup\neg(W=V)\supset\vdash([W]=[V]),$$

утверждающей: «если равенство $W=V$ величин W и V верно или ложно, то равенство $[W]=[V]$ размерностей этих величин верно». А если равенство $[W]=[V]$ не верно, то равенство $W=V$ не верно и не ложно, т. е. бессмысленно, что и утверждает формула (a_0).

§ 4. Отношение неравенства $W \neq V$ действительных или комплексных величин W и V определяется формулой

$$(W \neq V) \rightleftharpoons \sim (W = V), \tag{DI}$$

где $\sim$ — знак операции отрицания.

На основании формулы (23) [1]: $\downarrow A \equiv \downarrow \sim A$ получаем эквивалентность

$$\downarrow (W = V) \equiv \downarrow (W \neq V), \tag{1}$$

в силу которой из формул (a_0) и (a_0') следуют формулы

$$\overline{[W] = [V]} \supset \downarrow (W \neq V), \quad (a_1) \qquad \sim \downarrow (W \neq V) \supset \vdash ([W] = [V]). \quad (a_1')$$

Таким образом, если равенство $[W]=[V]$ не верно, то бессмысленно и равенство и неравенство величин W и V, а истинность равенства $[W]=[V]$ имеет место, когда и равенство и неравенство величин W и V имеет смысл. Неравенства $W>V$, $W<V$, $W \geqslant V$ и $W \leqslant V$ определены лишь для действительных ФВ и потому лишь для таких величин мы имеем право заменять в формулах (a_1) и (a_1') неравенство $W \neq V$ его частными случаями, указанными выше.

§ 5. Формулы (a_0), (a_0'), (a_1), (a_1') нетрудно обобщить и на кортежи $\mathbf{W}=(W_1, ..., W_n)$, $\mathbf{V}=(V_1, ..., V_n)$ любых ФВ: $W_1, ..., W_n$ и $V_1, ..., V_n$, имеющих одинаковые размерности. Для кортежей $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$, все компоненты которых имеют одинаковую размерность, их размерности $[\mathbf{W}]$ и $[\mathbf{V}]$ совпадают с размерностью каждой их компоненты и обобщения формул (a_0), (a_0'), (a_1), (a_1') имеют, очевидно, следующий вид:

$$\overline{[\mathbf{W}] = [\mathbf{V}]} \supset \downarrow (\mathbf{W} = \mathbf{V}), \quad (\mathbf{a}_0) \qquad \sim \downarrow (\mathbf{W} = \mathbf{V}) \supset \vdash ([\mathbf{W}] = [\mathbf{V}]), \quad (\mathbf{a}_0')$$

$$\overline{[\mathbf{W}] = [\mathbf{V}]} \supset \downarrow (\mathbf{W} \neq \mathbf{V}), \quad (\mathbf{a}_1) \qquad \sim \downarrow (\mathbf{W} \neq \mathbf{V}) \supset \vdash ([\mathbf{W}] = [\mathbf{V}]). \quad (\mathbf{a}_1')$$

Эти формулы верны, в частности, и для любых **векторов** $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$.

Если, например, $\mathbf{V}$ — скорость, а $\mathbf{W}$ — ускорение некоторого тела, то $\overline{[W]=[V]}$, а отсюда в силу **принципа вывода** ИВ из $(\mathbf{a}_0)$ и $(\mathbf{a}_1)$ следует $\downarrow(\mathbf{W}=\mathbf{V})$ и $\downarrow(\mathbf{W} \neq \mathbf{V})$, т. е. бессмысленность равенства $\mathbf{W}=\mathbf{V}$ и неравенства $\mathbf{W} \neq \mathbf{V}$. Но если $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$ — скорости двух различных тел, то и равенство и неравенство величин $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$ имеют смысл, и в силу принципа вывода ИВ из $(\mathbf{a}_0')$ и $(\mathbf{a}_1')$ следует $\vdash ([\mathbf{W}] = [\mathbf{V}])$: из $(\mathbf{a}_0')$ — в случае $\mathbf{W}=\mathbf{V}$, а из $(\mathbf{a}_1')$ — в случае $\mathbf{W} \neq \mathbf{V}$.

Формулы $(\mathbf{a}_0)$ — $(\mathbf{a}_1')$ верны для кортежей $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$ любых ФВ, и в частности, когда $\mathbf{W}=\mathbf{V}^{-1}$, где $\mathbf{V}^{-1}$ — **обращение кортежа** $\mathbf{V}$, определяемое формулой $(D5)$ [4]:

$$\mathbf{V}^{-1} = (V_1^{-1}, \ldots, V_n^{-1}).$$

§ 6. Всякую действительную или комплексную величину V можно представить [4] в следующем виде:

$$V = „V" \cdot V_e, \tag{2}$$

где „V" — **числовое значение**, а V_e — **единица величины** V.

Примечание. Используя обозначения [5], величину V можно представить также и в следующем виде:

$$V = \{V\}[V],$$

где $\{V\} = „V"$, а $[V] = V_e$, но мы не будем применять здесь этих обозначений, ибо символ $\{V\}$ обычно используется для обозначения множества, содержащего лишь один элемент, а символ $[V]$ используется здесь для обозначения размерности величины V.

В любой применяемой системе физических единиц размерность любого числа z считается равной единице, т. е.

$$[z]=1, \tag{2_0}$$

где z — любое комплексное, включая и несобственное число ∞ и, в частности, любое действительное число.

В силу этой формулы получаем равенства

$$[V]=[„V“]=1, \tag{3}$$

верные для всякой **безразмерной величины** V, т. е. величины, удовлетворяющей равенству $V=„V“$. Равенство $[„V“]=1$ верно и в случае, когда „V“ имеет неопределенное значение вида: $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty\cdot 0$ и т. п., ибо после раскрытия этих неопределенностей получается число.

Из (3) следует, что

$$[V]=[„V“\cdot V_e]=[„V“]\cdot[V_e]=1\cdot[V_e]=[V_e],\ [V]=[V_e]. \tag{4_0}$$

В частности, если V — безразмерная величина, то $V_e=1$ и, следовательно, $[V]=1$.

§ 7. Как известно [5, с. 14], все компоненты любого вектора должны иметь одинаковые размерности и измеряться в одних и тех же единицах. Поэтому

$$[\mathbf{V}]=[\mathbf{V}_e], \tag{4}$$

$$[\mathbf{V}]=[|\mathbf{V}|]=[V], \tag{5}$$

т. е. размерность всякого вектора равна размерности его абсолютной величины. Из равенств (4) и (5) следует, что для любых векторов $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$

$$([\mathbf{W}]=[\mathbf{V}])\equiv([W]=[V])\equiv([W_e]=[V_e]), \tag{6}$$

а отсюда следует формула

$$\overline{[\mathbf{W}]=[\mathbf{V}]}\equiv\overline{[W]=[V]}\equiv\overline{[W_e]=[V_e]}, \tag{7}$$

в силу которой формула $\overline{[\mathbf{W}]=[\mathbf{V}]}$ заменима в (a_0) и (a_1) формулами $\overline{[W]=[V]}$ и $\overline{[W_e]=[V_e]}$, а ее отрицание $\vdash([\mathbf{W}]=[\mathbf{V}])$ заменимо в (a_0') и (a_1') формулами $\vdash([W]=[V])$ и $\vdash([W_e]=[V_e])$. В частности, из того, что равенство [метр]=[секунда] не верно, из формулы (a_0) в силу принципа вывода ИВ следует, что $\downarrow(s=t)$, где s — путь, проходимый каким-либо телом за время t. Точно так же из формулы (a_0) следует, что

$$\downarrow(\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}),\ \downarrow(V^{-1}=V), \tag{8}$$

ибо $\overline{[\mathbf{V}^{-1}]=[\mathbf{V}]}$ и $\overline{[V^{-1}]=[V]}$ для любого вектора $\mathbf{V}\neq„\mathbf{V}“$.

Для самих ФВ W и V формулы, аналогичные формулам (4)—(7), неверны. Из физических соображений ясно, что $\downarrow(\mathbf{V}=|\mathbf{V}|)$, $\downarrow(\mathbf{V}=V)$, $\downarrow(\mathbf{V}=V_e)$, $\downarrow((\mathbf{W},\mathbf{V})=\mathbf{W}\times\mathbf{V})$, где $(\mathbf{W},\mathbf{V})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$, а $\mathbf{W}\times\mathbf{V}$ — их векторное произведение. Очевидно также, что

$$\downarrow(\mathbf{W}<\mathbf{V}),\ \downarrow(\mathbf{W}>\mathbf{V}),\ \downarrow(\mathbf{W}\geqslant\mathbf{V}),\ \downarrow(\mathbf{W}\leqslant\mathbf{V}),\ \downarrow(\mathbf{W}\nless\mathbf{V}),\ \downarrow(\mathbf{W}\ngtr\mathbf{V})$$

ибо отношения $<$, $>$, $\geqslant$, $\leqslant$, $\nless$, $\ngtr$ для векторов не определены. Вообще, всякое отношение между ФВ, скалярными, векторными или матричными, которое не определено, можно считать бессмысленным как в случае одинаковой, так и в случае различной размерности ФВ.

§ 8. Если все элементы матрицы **V** измеряются одной и той же единицей V_e, то

$$\mathbf{V} = \|v_{ik}\| = \|\,„v_{ik}“\,V_e\| = \|\,„v_{ik}“\,\|\cdot V_e$$

и мы можем принять следующее определение размерности матрицы:

$$[\mathbf{V}] \leftrightharpoons [V_e]. \qquad (D\mathrm{II})$$

Примерами таких матриц могут служить матрицы импедансов $\|Z_{ik}\|$ и матрицы адмиттансов $\|Y_{ik}\|$ четырехполюсников. Для такого рода матриц справедливы, очевидно, формулы, аналогичные формулам $(\mathbf{a}_0)-(\mathbf{a}_1')$.

Но, как и кортежи в общем случае, матрицы могут иметь элементы различной размерности, как, например, матрица A цепных параметров четырехполюсника. Определение (DII) размерности матрицы и аналогичное определение размерности кортежа, очевидно, неприменимо в общем случае. Проблема использования логики B_3 для анализа отношений между кортежами и матрицами с элементами различной размерности требует особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бочвар Д. А. Матем. сб., 1938, **4(46)**, № 2, с. 287. [2] Бочвар Д. А. Матем. сб., 1943, **12(54)**, № 3, с. 353. [3] Шестаков В. И. В кн.: Логические исследования. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 315. [4] Шестаков В. И. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1979, **20**, № 6, с. 47. [5] Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию
27.09.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 538.574

КРАЕВЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

Л. И. Приходько, А. Н. Стародумов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Во многих экспериментах, связанных с распространением волн в случайно-неоднородных средах, информацию о рассеивающей среде можно получить лишь по данным обратного рассеяния. Если при этом флуктуирующая среда достаточно протяженна, то необходимо учитывать эффекты многократного рассеяния назад. Учет обратного рассеяния резко усложняет задачу. Это связано с тем, что при рассеянии вперед поле на границе флуктуирующей среды обычно принимается равным падающему и процессы рассеяния хорошо описываются задачей с начальными условиями (метод параболического уравнения, приближение марковского процесса и др.). В теории многократного обратного рассеяния поле на границе случайной среды является функционалом от характеристик среды, что приводит к необходимости решать краевую стохастическую задачу. В настоящее время способы решения таких задач по существу ограничиваются методом «инвариантного погружения» [1]. Идея этого метода состоит в постановке вспомогательной задачи Коши для исходной краевой задачи; решения задач Коши удовлетворяют принципу причинности, что позволяет использовать приближение марковских процессов. С помощью метода «инвариантного по-