§ 8. Если все элементы матрицы **V** измеряются одной и той же единицей V_e, то

$$\mathbf{V} = \|v_{ik}\| = \|\,,,v_{ik}\text{``}\,V_e\| = \|\,,,v_{ik}\text{``}\|\cdot V_e$$

и мы можем принять следующее определение размерности матрицы:

$$[\mathbf{V}] \leftrightharpoons [V_e]. \qquad (D\text{II})$$

Примерами таких матриц могут служить матрицы импедансов $\|Z_{ik}\|$ и матрицы адмиттансов $\|Y_{ik}\|$ четырехполюсников. Для такого рода матриц справедливы, очевидно, формулы, аналогичные формулам $(\mathbf{a}_0)-(\mathbf{a}_1')$.

Но, как и кортежи в общем случае, матрицы могут иметь элементы различной размерности, как, например, матрица A цепных параметров четырехполюсника. Определение (DII) размерности матрицы и аналогичное определение размерности кортежа, очевидно, неприменимо в общем случае. Проблема использования логики B_3 для анализа отношений между кортежами и матрицами с элементами различной размерности требует особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бочвар Д. А. Матем. сб., 1938, **4(46)**, № 2, с. 287. [2] Бочвар Д. А. Матем. сб., 1943, **12(54)**, № 3, с. 353. [3] Шестаков В. И. В кн.: Логические исследования. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 315. [4] Шестаков В. И. Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон., 1979, 20, № 6, с. 47. [5] Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию
27.09.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 4

УДК 538.574

КРАЕВЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

Л. И. Приходько, А. Н. Стародумов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Во многих экспериментах, связанных с распространением волн в случайно-неоднородных средах, информацию о рассеивающей среде можно получить лишь по данным обратного рассеяния. Если при этом флуктуирующая среда достаточно протяженна, то необходимо учитывать эффекты многократного рассеяния назад. Учет обратного рассеяния резко усложняет задачу. Это связано с тем, что при рассеянии вперед поле на границе флуктуирующей среды обычно принимается равным падающему и процессы рассеяния хорошо описываются задачей с начальными условиями (метод параболического уравнения, приближение марковского процесса и др.). В теории многократного обратного рассеяния поле на границе случайной среды является функционалом от характеристик среды, что приводит к необходимости решать краевую стохастическую задачу. В настоящее время способы решения таких задач по существу ограничиваются методом «инвариантного погружения» [1]. Идея этого метода состоит в постановке вспомогательной задачи Коши для исходной краевой задачи; решения задач Коши удовлетворяют принципу причинности, что позволяет использовать приближение марковских процессов. С помощью метода «инвариантного погружения» можно получить аналитические выражения для статистических характеристик поля в случае одномерной модели и малых значений дисперсии флуктуаций ($\sigma^2 \ll 1$). В трехмерном случае метод позволяет свести краевую задачу к форме, удобной для численного счета.

В данной работе рассматривается метод получения статистических характеристик поля, основанный на представлении функции Грина стохастического уравнения в виде функционального интеграла. Такое представление позволяет произвести в явном виде усреднение на начальном этапе задачи и в дальнейшем оперировать лишь с моментами поля.

Пусть на слой неоднородной среды, располагающийся в области $0<z<L$, падает нормально из области $z<0$ плоская волна $E_0 e^{ikz}$. При этом комплексная амплитуда поля в среде удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 \varepsilon(r) E = 0. \tag{1}$$

Так как решение трехмерной задачи приводит к значительным усложнениям, то в качестве первого шага рассмотрим одномерный случай, когда $\varepsilon(r) = \begin{cases} 1, & z<0,\ z>L, \\ 1+\varepsilon_1(z), & 0<z<L, \end{cases}$ где $\varepsilon_1(z)$ — случайное поле, статистически однородное и распределенное по нормальному закону, причем $\langle \varepsilon_1(z) \rangle = 0$. Тогда волновое поле можно представить (с учетом обратного рассеяния) следующим образом:

$$E_{\mathrm{I}} = E_0 e^{ikz} + E_{\text{ор}} e^{-ikz}, \quad z<0,$$
$$E_{\mathrm{III}} = E_{\text{пр}} e^{ikz}, \qquad z>L,$$

где $E_{\text{ор}}$ и $E_{\text{пр}}$ — случайные амплитуды обратно рассеянной и прошедшей волн. Решение уравнения (1) в области $0<z<L$ можно выразить через значения поля и его производной на границе области по формуле Грина:

$$E = \int\limits_{z'=0} \left(E\,\frac{\partial G}{\partial z'} - G\,\frac{\partial E}{\partial z'} \right) ds + \int\limits_{z'=L} \left(G\,\frac{\partial E}{\partial z'} - E\,\frac{\partial G}{\partial z'} \right) ds, \tag{2}$$

где $G(r, r')$ — функция Грина уравнения (1). Полагая $\varepsilon_1(z)\,|_{z=0,L} = 0$, запишем условия непрерывности поля и его нормальной производной на границах неоднородного слоя:

$$\begin{aligned} &E_{\mathrm{I}}(0) = E(0), \quad \frac{\partial E_{\mathrm{I}}(0)}{\partial z} = \frac{\partial E(0)}{\partial z}, \\ &E_{\mathrm{III}}(L) = E(L), \quad \frac{\partial E_{\mathrm{III}}(L)}{\partial z} = \frac{\partial E(L)}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Конечной целью задачи является определение среднего поля в среде при $\sigma \sim 1$, где σ^2 — дисперсия флуктуаций $\varepsilon_1(z)$.

Используя граничные условия (3), найдем связь между полем и его производной на каждой из границ:

$$\begin{aligned} &ikE(0) + \frac{\partial E(0)}{\partial z} = 2ikE_0, \\ &ikE(L) - \frac{\partial E(L)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), получим выражение для поля внутри слоя:

$$E(z)=\int\limits_{z'=0}\left[2E_0\frac{\partial G}{\partial z'}-\frac{\partial E}{\partial z'}\left(1+\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial z'}\right)G\right]ds+$$

$$+\int\limits_{z'=L}\frac{\partial E}{\partial z'}\left(1-\frac{1}{ik}\frac{\partial\cdot}{\partial z'}\right)Gds. \qquad (5)$$

Поскольку производные $\left.\frac{\partial E}{\partial z'}\right|_{z'=0;\,L}$ зависят от характеристик среды и являются неизвестными функционалами от $\varepsilon_1(z)$, то при усреднении (5) в правой части возникнут корреляторы вида $\langle G\partial E/\partial z'\rangle$. В общем случае расцепление корреляций $\langle G\partial E/\partial z'\rangle$ не представляется возможным. Однако в случае нормальных флуктуаций $\varepsilon_1(z)$ можно произвести усреднение (5), используя функциональное представление (6) для функции Грина уравнения Гельмгольца [2] и формулу (7) для среднего значения произведения двух функционалов [1]:

$$G(r,r')=i\int\limits_0^\infty d\xi\int D^3v\,\delta\left(r-r'+\int\limits_0^\xi v(\eta)\,d\eta\right)\times$$

$$\times\exp\left[i\int\limits_0^\xi\frac{v^2}{4}(\eta)\,d\eta+ik^2\xi+ik^2\int\limits_0^\xi\varepsilon_1\left(z+\int\limits_{\xi'}^\xi v_z(\eta)\,d\eta\right)d\xi'\right], \qquad (6)$$

$$\left\langle\exp\left\{i\int\varepsilon_1(z)\,dz\right\}R\left[\varepsilon_1(z)\right]\right\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}\iint B(z_1,z_2)\,dz_1dz_2\right\}\times$$

$$\times\left\langle R\left[\bar{\varepsilon}_1(z)+i\int dz_1B(z,z_1)\right]\right\rangle, \qquad (7)$$

где $D^3v=\dfrac{\prod\limits_{\eta=0}^{\xi}d^3v(\eta)}{\int\prod\limits_{\eta=0}^{\xi}d^3v(\eta)\exp\left\{i\int\limits_0^\xi\frac{v^2(\eta)}{4}\,d\eta\right\}}$,

$R[\varepsilon_1(z)]$ — произвольный функционал от $\varepsilon_1(z)$, $B(z_1,z_2)$ — функция корреляции случайной величины $\varepsilon_1(z)$. Тогда для среднего поля внутри среды получим следующее выражение:

$$\langle E(z)\rangle=-A_0\left(I_1+\frac{1}{ik}I_2\right)\Big|_{z'=0}+2E_0I_2\Big|_{z'=0}+A_L\left(I_1-\frac{1}{ik}I_2\right)\Big|_{z'=L}, \qquad (8)$$

где приняты обозначения:

$$A_{0,L}=\left\langle\frac{\partial}{\partial z'}E\left[\varepsilon_1(z)+ik^2\int B(z,z')\,dz'\right]\right\rangle\Big|_{z'=0,L},$$

$$I_1=i\int\limits_0^\infty d\xi\int Dv_z\int d\varkappa_z\exp\left\{\frac{i}{4}\int\limits_0^\xi v_z^2(\eta)\,d\eta+ik^2\xi+i\varkappa_z(z-z')+\right.$$

$$\left.+i\varkappa_z\int\limits_0^\xi v_z(\eta)\,d\eta-\frac{k^4}{2}\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\xi B\left(\int\limits_{\xi'}^{\xi''}v_z(\eta)\,d\eta\right)d\xi'd\xi''\right\};\ I_2=\frac{\partial I_1}{\partial z'}. \qquad (9)$$

Рассмотрим случай мелкомасштабных флуктуаций ($kl \ll 1$). Корреляционную функцию таких неоднородностей можно аппроксимировать δ-функцией, тогда показатель экспоненты в выражении для I_1 запишется в следующем виде:

$$S[v] = \int_0^\xi \frac{v_z^2(\eta)}{4} d\eta + k^2\xi + \frac{ik^4\sigma^2 l}{2} \int_0^\xi \frac{d\eta}{|v(\eta)|} + \varkappa_z \left(z - z' + \int_0^\xi v_z(\eta)\, d\eta\right). \quad (10)$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2 с помощью функционального аналога метода «перевала». Варьируя (10) по $v_z(\eta)$ и приравнивая получившиеся выражения нулю, найдем уравнение для экстремалей $v_z^0(\eta)$:

$$\frac{\delta S}{\delta v_z(\eta)} = \frac{v_z^0(\eta)}{2} + \varkappa_z - \frac{ik^4\sigma^2 l}{2v_z^0(\eta)\,|v_z^0(\eta)|} = 0. \quad (11)$$

Считая, что выполняется условие $\mu = kl\sigma^2 \ll 1$ и решая (11) методом итераций, определим $v_z^0(\eta)$ с точностью до второго порядка по μ включительно:

$$v_z^0(\eta) = -2\varkappa_z - \frac{ik^4\sigma^2 l}{4\varkappa_z |\varkappa_z|} - \frac{(kl\sigma^2)^2 k^6}{\varkappa (4\varkappa^2)^2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\delta^2 S}{\delta v_z(\eta')\,\delta v_z(\eta'')} = \frac{1}{2}\delta(\eta' - \eta'')\left(1 - \frac{ik^4\sigma^2 l}{|v_z^0(\eta)|^3}\right),$$

и интегрируя выражение для I_1 по функциональной переменной $v(\eta)$ и по переменной ξ, получим для I_1 следующее выражение:

$$I_1 \simeq -\int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa_z \cdot e^{ik(z-z')}\left[k^2 - \varkappa_z^2 + \frac{ik^4\sigma^2 l}{|\varkappa_z|} - \frac{k^8\sigma^4 l^2}{4(4\varkappa_z^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (k^2 - \varkappa_z^2)\left(\frac{ik^4\sigma^2 l}{8\varkappa_z^3} + \frac{3k^8\sigma^4 l^2}{(4\varkappa_z^2)^3}\right)\right]^{-1}. \quad (12)$$

В отсутствие неоднородностей диэлектрической проницаемости полюсы подынтегрального выражения в (12) определяются точками $\varkappa_z^{1,2} = \pm k$. Полагая, что наличие флуктуаций не приводит к появлению добавочных полюсов, а вызывает лишь смещение старых [3], можно найти особые точки в (12), используя малый параметр μ. Тогда

$$\varkappa_z^{1,2} = \pm k\,(1 + ikl\sigma^2/8 + (kl\sigma^2)^2/32)$$

и для I_1 получаем окончательно:

$$I_1 = \frac{i}{2k}\exp\left\{ik|z - z'|\left(1 + \frac{ikl\,\sigma^2}{8} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(kl\,\sigma^2)^2}{32}\right)\right\}\left[1 + \frac{ikl\,\sigma^2}{8} + \frac{(kl\,\sigma^2)^2}{32}\right]^{-1}.$$

Для определения констант A и B воспользуемся усредненными условиями (4) с учетом (8)—(9):

$$-A_0\left(ikI_1 + \frac{1}{ik}\frac{\partial I_2}{\partial z'}\right)\Bigg|_{z=z'=0} + 2E_0\left(ikI_2 + \frac{\partial I_2}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=z'=0} +$$

$$+ A_L\left(ikI_1 - 2I_2 - \frac{1}{ik}\frac{\partial I_2}{\partial z}\right)\Bigg|_{\substack{z'=L\\ z=0}} = 2ikE_0,$$

$$-A_0\left(ikI_1+2I_2+\frac{1}{ik}\frac{\partial I_2}{\partial z'}\right)\Bigg|_{\substack{z'=0\\ z=L}}+2E_0\left(ikI_2-\frac{\partial I_2}{\partial z}\right)\Bigg|_{\substack{z'=0\\ z=L}}+$$

$$+A_L\left(ikI_1-\frac{1}{ik}\frac{\partial I_2}{\partial z'}\right)\Bigg|_{z=z'=L}=0. \qquad (13)$$

Решая (13) и подставляя найденные значения $A_{0,L}$ в выражение для среднего поля, получим

$$\langle E(z)\rangle=E_0\left(1-\frac{i\mu}{16}-\frac{\mu^2}{64}\right)\exp\left\{ikz\left(1+\frac{i\mu}{8}+\frac{\mu^2}{32}\right)\right\}+$$

$$+E_0\left(\frac{i\mu}{16}+\frac{\mu^2}{64}\right)\exp\left\{ik(2L-z)\left(1+\frac{i\mu}{8}+\frac{\mu^2}{32}\right)\right\}. \qquad (14)$$

Второе слагаемое в правой части (14) описывает среднее обратно рассеянное поле. При стремлении толщины слоя к бесконечности ($L\to\infty$) амплитуда поля, рассеянного назад, экспоненциально спадает, и отражающие свойства слоя определяются лишь эффективным показателем преломления. Среднее поле в полубесконечной области вследствие рассеяния затухает по экспоненциальному закону с длиной экстинкции $l_э=4/(k^2l\sigma^2)$. Учет многократного рассеяния приводит к изменению волнового числа $k_{эфф}=k(1+i\mu/8+\mu^2/32)$. Возрастание действительной части описывает среднее увеличение фазового пути за счет многократного рассеяния.

Существенно, что для мелкомасштабных флуктуаций выражение (14) справедливо и при $\sigma\sim1$; единственным ограничением на величину σ является условие $kl\sigma^2\ll1$.

Таким образом, использованное в работе представление функции Грина стохастического уравнения Гельмгольца в виде интеграла «по траекториям» позволяет в явном виде произвести усреднение в краевых стохастических задачах и свести задачу к детерминированной. Возникающие в результате интегралы по функциональной переменной можно вычислить с помощью аналога метода «перевала». При этом полученное решение автоматически учитывает многократное рассеяние как вперед, так и назад.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980, с. 193. [2] Фрадкин Е. С. Тр. ФИАН, 1965, 29, с. 7. [3] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967, с. 481.

Поступила в редакцию
27.09.82