но объяснить тем, что в случае ДА только часть энергии поглощенного света переходит в тепло.

Для определения мощности света, попадающего в образец, использовались результаты экспериментов, в которых освещались растворы брома, так как в этом случае энергия поглощенного света полностью переходит в тепло. Конкретно обрабатывались данные для концентрации Br_2 0,012 моль/л (кривая *5* на рисунке). При освещении этого раствора, как видно из рисунка, скорость изменения Δf примерно вдвое меньше максимальной, полученной для концентрации Br_2 0,05 моль/л, поэтому считалось, что образец прогревается равномерно по освещаемому объему. Скорость нагрева определялась на начальном этапе освещения, где ΔT зависит от времени линейно. Удельная теплоемкость рассчитывалась на основе справочных данных. Учитывалось неполное поглощение света в образце. В результате расчетов получена величина мощности света, попадающего в образец, $W=2{,}0\cdot10^{-2}$ Вт. Эта мощность соответствует попаданию в образец $4{,}4\cdot10^{16}$ квантов света $\lambda=436$ нм за 1 с. Определенное с помощью химической актинометрии число квантов света $\lambda=436$ нм, попадающих в образец за 1 с, составило $4{,}2\cdot10^{16}$. Актинометрия проводилась при тех же условиях освещения и в той же ампуле. При расчетах также учитывалась доля поглощенного света. Полученные двумя методами значения совпадают в пределах ошибок, которые для обоих измерений составляют $5\div10\%$.

Предложенный нами метод позволяет за $1\div2$ мин с точностью $5\div10\%$ определить мощность света, попадающего в образец спектрометра ЯМР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Калверт Дж., Питтс Дж. Фотохимия. М.: Мир, 1968. [2] Эмсли Дж., Финей Дж., Сатклиф Л. Спектроскопия ядерного магнитного резонанса высокого разрешения. Т. 1. М.: Мир, 1968. [3] Petrakis L., Sederholm C. H. J. Chem. Phys., 1961, 35, N 4, p. 1174. [4] Константинов Ю. С., Смирнов А. М. Приб. и техн. эксперимента, 1980, № 2, с. 143. [5] Kistiakowsky G. B., Sternberg J. C. J. Chem., Phys., 1953, 21, p. 2218.

Поступила в редакцию
15.01.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 53:51;538.56:530.145

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПРОБНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР С *RC*-ДАТЧИКОМ

С. И. Бабиченко, В. Н. Руденко, А. Г. Ягола

(кафедра физики колебаний)

Введение. В прецизионных экспериментах с пробными телами на первое место обычно выдвигается задача обнаружения внешнего воздействия на пробное тело [1, 2]. Однако можно указать ряд задач, в которых необходимо оценить параметры воздействия и восстановить его форму. В частности, в современном гравитационно-волновом эксперименте следом за регистрацией всплесков излучения от космических объектов будет интересен анализ их спектральных характеристик (амплитуды, частоты, длительности), тонких особенностей формы, которые несут уникальную информацию о процессах внутри сколлапсировавших объектов, в звездных скоплениях, ядрах галактик и квазаров [3, 4].

Задача восстановления внешнего воздействия по виду отклика является неустойчивой по отношению к ошибкам эксперимента, к которым приводит неточное знание параметров приемного тракта, наличие нулей в его передаточной функции и флуктуаций в регистрирующей аппаратуре, наконец, просто операторская ошибка считывания выходных данных.

Формально указанная задача относится к классу некорректных обратных задач математической физики, для которых известны алгоритмы регуляризации, позволяющие получить устойчивые приближения к точному входному воздействию [5, 6, 7]. Однако особенностью проблемы в приложении к экспериментам с пробными телами, как правило, является малая величина полезного сигнала (т. е. уровень отношения сигнал/шум на выходе системы порядка единицы), в то время как типичные алгоритмы решения обратных задач эффективно работают при достаточно большом сигнале.

Цель данного исследования состояла в отработке методики оценки параметров воздействия, заданной формы, возмущающего пробный осциллятор. Для регистрации движений осциллятора выбран простейший релаксационный преобразователь RC-типа с регулируемым коэффициентом связи. Система в целом (осциллятор с датчиком) вместе с регулярными и случайными воздействиями моделировалась на ЭВМ заданием уравнений движения. Процедура восстановления параметров в виде простейших алгоритмов также выполнялась на ЭВМ.

1. **Модель приемной системы.** Модель простейшего емкостного датчика смещений представлена на рис. 1. Колебания пробного осциллятора меняют емкость контура, обратное влияние обусловлено пондеромоторным взаимодействием пластин конденсатора. Процессы, протекающие в такой системе, описываются следующими уравнениями:

$$\ddot{\xi} + \omega_\mu^2\xi = f(t)\,\omega_\mu^2 + \omega_\mu^2\lambda_0(\eta^2 - \eta_0^2),$$
$$\dot{\eta} + \theta\eta(1-\xi) = I_0. \qquad (1)$$

Здесь $\xi = x/d$ — относительная деформация резонатора (d — начальный зазор между пластинами конденсатора), $\eta = q/q_0$ — нормированный заряд на нем (q_0 — произвольная постоянная),

$$\lambda = \lambda_0\eta_0^2;\ \lambda_0 = \frac{q_0^2}{2\omega_\mu^2 m d^2 C_0};\ \theta = 1/rC_0;$$

$C_0 = S/4\pi d$,
$I_0 = E_0/rq_0$, $f(t) = F(t)/\omega_\mu^2 md$,
где $F(t)$ — внешняя сила. В первом уравнении системы (1) статическое смещение пластины конденсатора компенсировано. Малая относительная деформация резонатора ($|\xi| \ll 1$) позволяет привести систему нелинейных уравнений к линейному виду:

$$\ddot{\tilde{\xi}} + \omega_\mu^2\tilde{\xi} = f(t)\,\omega_\mu^2 + 2\omega_\mu^2\lambda_0\eta_0\tilde{\eta},$$
$$\dot{\tilde{\eta}} = \theta\eta_0\tilde{\xi} + \theta\tilde{\eta} = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\tilde{\xi} = \xi$; $\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$; $\eta_0 = I_0/\theta$.

Решение линейной системы уравнений (2) и расчет напряжения на выходе $V(t) = r\theta q_0(\tilde{\xi}\eta_0 - \tilde{\eta})$ при известном входном сигнале представляют собой прямую задачу.

Параметры системы выбирались следующими: $\omega_\mu = 600$ с$^{-1}$, $\lambda_0 = 12500$; $\theta = 2500$ с$^{-1}$, $I_0 = 4400$; $rq_0 = 10^{-2}$ В.

Коэффициент передачи по выходному напряжению для системы (2) ограничен сверху резонансной характеристикой пробного осциллятора $\sim(\omega_\mu/\omega)^2$, а снизу частотными свойствами RC-датчика и падает при априорно принятом условии «безинерционной» регистрации: $RC \ll \omega^{-1}$. Параметр связи λ неразумно делать слишком малым, так как это приводит к ослаблению выходного сигнала; однако при слишком большом значении $\lambda \gtrsim \lambda_{кр} = 0{,}27$ резонансные свойства пробного осциллятора теряются: его эффективное время релаксации $\tau^*_{эфф}$ становится меньше ω_μ^{-1}. Оптимальное значение параметра связи, которое было выбрано для численного эксперимента, отвечало условию максимума выходного сигнала длительности T, содержащей более одного периода колебаний с частотой ω_μ, но остающейся меньше $\tau^*_{эфф}$. При этом получилось $\lambda_{опт} = 0{,}11$, частота максимального отклика $\omega_m = 535$ с$^{-1}$, диапазон несущей частоты принимаемого сигнала полагался априори $|\omega - \omega_m| = 400$ с$^{-1}$.

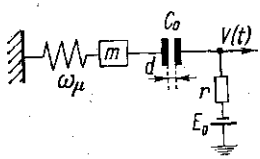

Рис. 1. Модель датчика смещений

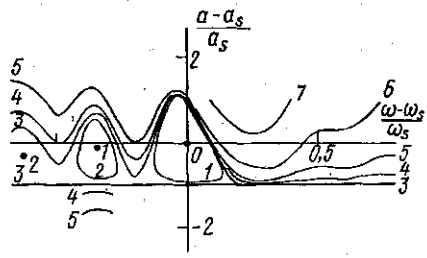

Рис. 2. Линии равного функционала для сигнала «синусоидальный цуг». Точка (0, 0) соответствует $\Phi = 10^{-13}$ В^2. $\Phi = 1{,}59 \cdot 10^{-6}$ (*1*); $1{,}71 \cdot 10^{-6}$ (*2*); $1{,}77 \cdot 10^{-6}$ (*3*); $1{,}84 \cdot 10^{-6}$ (*4*); $2{,}08 \cdot 10^{-6}$ (*5*); $3{,}00 \cdot 10^{-6}$ (*6*) и $7{,}74 \cdot 10^{-6}$ (*7*) В^2

Исследовалась задача оценки параметров внешнего воздействия известной формы по отклику на выходе датчика. Для этого рассматривались сигналы двух различных форм — синусоидальный цуг и гармонический сигнал с колоколообразной огибающей, — длительность которых меньше времени релаксации системы. Решением прямой задачи для фиксированных параметров сигнала $\omega_\mu^2 f(t)$ (амплитуды $a = 10$ с$^{-2}$, частоты $\omega = 460$ с$^{-1}$, длительности $T = 0{,}05$ с) задавались значения отклика $V(t_i)$ на равномерной сетке по времени с числом точек $N = 101$.

2. **Оценка параметров внешнего воздействия при наличии ошибки считывания.** Пусть в результате проведения численного эксперимента получен набор значений для выходного напряжения в точках t_i. Нужно оценить длительность, частоту и амплитуду сигнала при известном $V(t_i)$ и заданной форме сигнала. Знание параметров датчика позволяет оценить функцию отклика системы $A(T, \omega, a, t)$ в отсутствие шумов. Здесь T, ω, a — параметры внешнего воздействия, подлежащие определению. Простейшим алгоритмом для решения подобных задач является поиск по минимуму среднеквадратичной ошибки [5, 7]. Таким образом, процедура оценки параметров сводится в конечном счете к поиску минимума функционала

$$\Phi(T, \omega, a) = \sum_{i=1}^{N} \{A(T, \omega, a, t_i) - V(t_i)\}^2.$$

Для решения использовались численные методы, при этом строились минимизирующие последовательности, на элементах которых функцио-

нал $\Phi(T, \omega, a)$ не возрастает; минимизация начинается с некоторого начального приближения. При этом требуется предварительная численная оценка параметров сигнала по виду отклика, которая неточна из-за ошибки машинного счета и ошибки считывания данных.

Для двух различных выходных реализаций $V(t)$ были построены карты линий равного функционала в плоскости (ω, a).

На рис. 2 показаны линии равного функционала для сигнала «синусоидальный цуг». Самый глубокий минимум соответствует точным параметрам входного сигнала. Существуют точки локальных минимумов. Таким образом, восстановление истинных параметров такого сигнала возможно при удачном выборе начального приближения. В нашем случае минимизирующая последовательность приводит в точку гло-

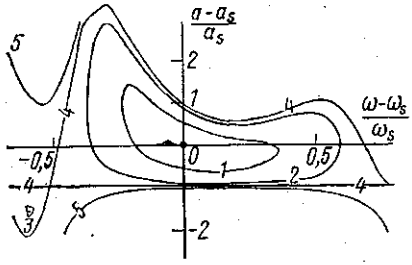

Рис. 3. Линии равного функционала для сигнала с колоколообразной огибающей. Точка (0, 0) соответствует $\Phi=10^{-13}$ В². $\Phi=1{,}29\cdot10^{-5}$ (*1*), $3{,}43\cdot10^{-5}$ (*2*), $4{,}23\cdot10^{-5}$ (*3*), $4{,}25\cdot10^{-5}$ (*4*) и $4{,}60\cdot10^{-5}$ (*5*) В²

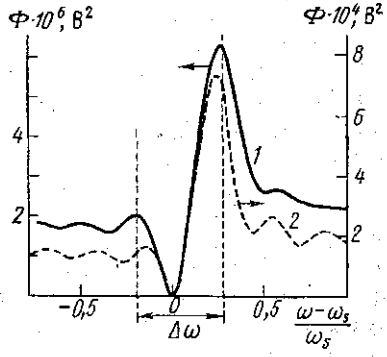

Рис. 4. Зависимость величины функционала от восстанавливаемой частоты для сигнала «синусоидальный цуг»: *1* — система без шума ($\varkappa=0$), *2* — система с шумом ($\varkappa=1$)

бального минимума, если начальное приближение для частоты отличается от истинного $\omega=460$ с$^{-1}$ менее чем на 18%, а для амплитуды $a_s=10$ с$^{-2}$ — на 50%. В задаче для восстановления выбирался сигнал частоты $\omega=460$ с$^{-1}$, соответствующей склону резонансной кривой, где незначительные ошибки в определении частоты приводили к большим ошибкам в определении амплитуды. Начальное приближение для частоты сигнала отличалось от истинного на 5%, для амплитуды — на 20%. Параметры сигнала были восстановлены с большой точностью.

Для второго рассматриваемого сигнала функционал $\Phi(T, \omega, a)$ оказался выпуклым практически для всей рассматриваемой области параметров. Точка глобального минимума соответствовала точным значениям параметров внешнего сигнала (рис. 3). Таким образом, при построении минимизирующей последовательности для второго сигнала удачный выбор начального приближения был несущественным.

Различные условия восстановления, возможно, связаны с потерей первым сигналом части спектра при прохождении через систему.

3. **Оценка параметров внешнего воздействия на фоне флуктуаций датчика.** Была рассмотрена и решена задача оценки параметров внешней силы заданной формы с учетом флуктуаций параметров регистрирующей цепи. Возмущенное значение ЭДС $E=E_0+\varkappa(\zeta_i-0{,}5)rq_0$ было получено при помощи датчика случайных чисел. Здесь $\varkappa$ — уровень шума, ζ_i — реализация случайной величины с равномерным распределением на интервале [0, 1], что соответствует дельта-коррелированному

шуму: $<nn_\tau>=N_ш\delta/\tau)$, где $N_ш=0{,}8\cdot10^{-3}$ В·с$^{-1}$ при $\varkappa=1$ с$^{-1}$. Были определены доверительные интервалы для оценки параметров рассматриваемых сигналов по критерию χ_α^2 при $\alpha=0{,}95$ и при уровне шума $\varkappa=1$ с$^{-1}$. Находились такие параметры T, ω, a, при которых выполнялось следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{N}\{A(T,\omega,a,t_i)-\tilde{V}(t_i)\}^2\leqslant\chi^2_{0,95}(N)\cdot\sigma^2,$$

здесь $\tilde{V}(t_i)$ — выходная реализация с шумом, σ^2 — дисперсия флуктуаций на выходе системы. Наличие шума приводит к ошибкам в определении параметров внешнего сигнала.

На рис. 4 показана зависимость величины функционала от восстанавливаемой частоты сигнала «синусоидальный цуг» при наличии шума и без него. Наличие шума в системе приводит к смещению точки глобального минимума и к уменьшению области главного минимума $\Delta\omega$ примерно на 19%.

Максимальная ошибка восстановления по доверительным интервалам для частоты, амплитуды и длительности сигнала «синусоидальный цуг» ($a_s=10$ с$^{-2}$, $\omega_s=460$ с$^{-1}$, $T_s=0{,}05$ с) составила соответственно 1,3; 14 и 10%, для сигнала с колоколообразной огибающей — соответственно 12,4; 22,5 и 2%. Ошибка больше у второго сигнала, чем у первого, так как мощность второго сигнала меньше ($P1/P2\sim1{,}6$), а уровень шума $\varkappa=1$ с$^{-1}$ один и тот же.

Заключение. В работе проведена оценка параметров сигналов двух различных форм, действующих на шумящий и нешумящий емкостный датчик.

1. Показано, что рассмотренные методы решения обратных задач дают возможность восстановить сигнал абсолютно точно в случае нешумящего датчика, даже при наличии грубой априорной оценки оператора, и с конечной точностью — в случае шумящей системы.

2. Установлено, что существуют конечные границы для допустимой ошибки оператора, зависящие от свойств системы и сигнала, которые сужаются при появлении шума в датчике.

3. Найдены области однозначного определения параметров сигналов и показано, что обрезание спектра входного сигнала приводит к уменьшению такой области.

Внутренние шумы приемного устройства в экспериментах с пробными телами ограничивают точность восстановления полезного сигнала. Определение параметров сигнала при шумящем электромеханическом преобразователе служит «связующим звеном» между задачами бинарного обнаружения («да», «нет») и восстановлением формы сигнала. Оценка параметров обеспечивает существенно большую апостериорную информацию о сигнале, чем простое обнаружение, и в то же время требует значительно меньших отношений сигнал/шум, чем в задачах восстановления. В дальнейшем предполагается проанализировать более сложные виды датчиков, используемые в экспериментах с пробными телами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974. [2] Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М.: Наука, 1970. [3] Thorne K. S. Rev. Mod. Phys., 1980, 52, p. 285. [4] Braginsky V. B., Rudenko V. N. Phys. Reports, 1978, 46, N 6, p. 196. [5] Тихонов А. М., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных

задач. М.: Наука, 1974. [6] Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М.: Сов. радио, 1979. [7] Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978, с. 335.

Поступила в редакцию
20.07.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1983, Т. 24, № 5

УДК 519.95

ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС. ЗАДАЧИ РЕДУКЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Рассмотрим линейную схему измерения сигнала f:

$$\xi = Af + \nu,\ \xi \in \overline{\mathcal{R}},\ f \in \mathcal{R}, \tag{1}$$

где ξ — результат измерения Af, ν — сопутствующая погрешность (шум), A — линейный оператор, моделирующий измерительный прибор, $\mathcal{R}$, $\overline{\mathcal{R}}$ — евклидовы пространства. В работе [1] исследованы простейшие задачи редукции для измерительно-вычислительного комплекса «А+ЭВМ», в которых линейное преобразование (1) $R\xi = Uf + R\nu$ рассматривается как выходной сигнал комплекса и интерпретируется как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал заданного прибора $U = RA$. Если в (1) ν — случайный вектор с нулевым средним и корреляционным оператором Σ, то речь идет о задачах редукции в рамках модели $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1).

Однако, как отмечено в [1], такая редукция может оказаться неустойчивой, а в ряде случаев — даже невозможной. Кроме того, на практике уровень шума $R\nu$, как правило, оказывается неприемлемо высоким, существенно искажая сигнал Uf. Ниже обсуждаются задачи редукции, свободные от перечисленных недостатков.

§ 1. **Частные задачи редукции.** Запишем линейное преобразование схемы (1) в следующем виде:

$$R\xi = Uf + (RA - U)f + R\nu. \tag{2}$$

Если $R\xi$ рассматривать как выходной сигнал прибора U, то возникают ошибки двух типов: слагаемое $R\nu$ — шум, никак не связанный с сигналом f, и $(RA-U)f$ — искажение, зависящее от неизвестного f, т. е. ложный сигнал. В [1] используется условие $RA = U$, уничтожающее ложный сигнал при любом $f \in \mathcal{R}$. Но если при этом уровень шума $R\nu$ слишком велик, то условие точного равенства нулю ложного сигнала неразумно. В таком случае, допустив минимальный ложный сигнал, можно уменьшить шум и сбалансировать влияние обеих ошибок. Однако в случае модели $[A, \Sigma]$ априори оценить ошибку $(RA-U)f$ невозможно, поскольку сигнал f произволен, и речь может идти лишь о минимизации отличий RA от U. Поэтому задачу редукции к заданному прибору U, называемую далее частной задачей редукции, рассмотрим в следующей постановке:

$$\inf\{\|RA - U\|_2 \mid R \in (\overline{\mathcal{R}} \to \mathcal{U}),\ E\|R\nu\|^2 \leqslant \varepsilon\} = \rho_\varepsilon. \tag{3}$$

Если R_ε — решение задачи (3), то сигнал $R_\varepsilon\xi$ следует рассматривать